



Super-résolution de signaux 1-D et 2-D

23 janvier 2018

Kévin Polisano

Séminaire du CEA de Grenoble



LABORATOIRE
JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE



Plan de l'exposé

- 1 **Présentation générale**
 - Contexte des travaux de thèse
 - Principe de super-résolution
 - Intérêts pour la spectroscopie de masse

- 2 **Super-résolution de lignes 2-D diffractées et bruitées**
 - Modélisation des lignes diffractées et formulation d'un problème inverse
 - Résolution du problème d'optimisation convexe
 - Estimation spectrale des paramètres

Contexte des travaux de thèse

- Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe CVGI (Calcul des variations, Géométrie, Image), école doctorale MSTII.



Contexte des travaux de thèse

- Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe CVGI (Calcul des variations, Géométrie, Image), école doctorale MSTII.
- Thèse financée par une allocation de recherche CNRS.

Contexte des travaux de thèse

- Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe CVGI (Calcul des variations, Géométrie, Image), école doctorale MSTII.
- Thèse financée par une allocation de recherche CNRS.
- Encadrants : Valérie Perrier (Directrice)
Marianne Clausel (Co-encadrante)
Laurent Condat (Co-encadrant)

Contexte des travaux de thèse

- Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe CVGI (Calcul des variations, Géométrie, Image), école doctorale MSTII.
- Thèse financée par une allocation de recherche CNRS.
- Encadrants : Valérie Perrier (Directrice)
Marianne Clausel (Co-encadrante)
Laurent Condat (Co-encadrant)
- Titre : « Modélisation de textures anisotropes par la transformée en ondelettes monogènes et super-résolution de lignes 2-D », *soutenue le 12 décembre 2017.*

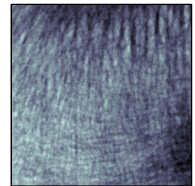
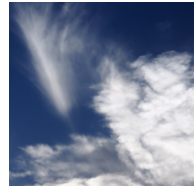
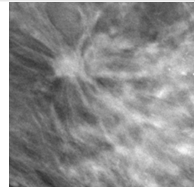
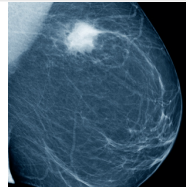


Contexte des travaux de thèse

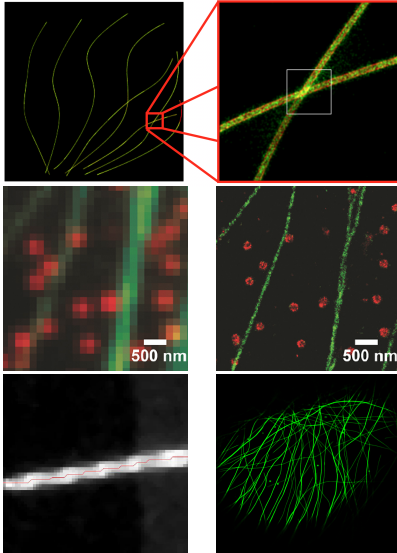
- Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe CVGI (Calcul des variations, Géométrie, Image), école doctorale MSTII.
- Thèse financée par une allocation de recherche CNRS.
- Encadrants : Valérie Perrier (Directrice)
Marianne Clausel (Co-encadrante)
Laurent Condat (Co-encadrant)
- Titre : « Modélisation de textures anisotropes par la transformée de ondelettes monogènes et **super-résolution de lignes 2-D** », soutenue le 12 décembre 2017.



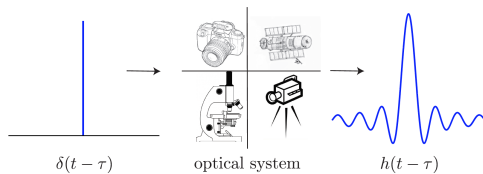
Motivations



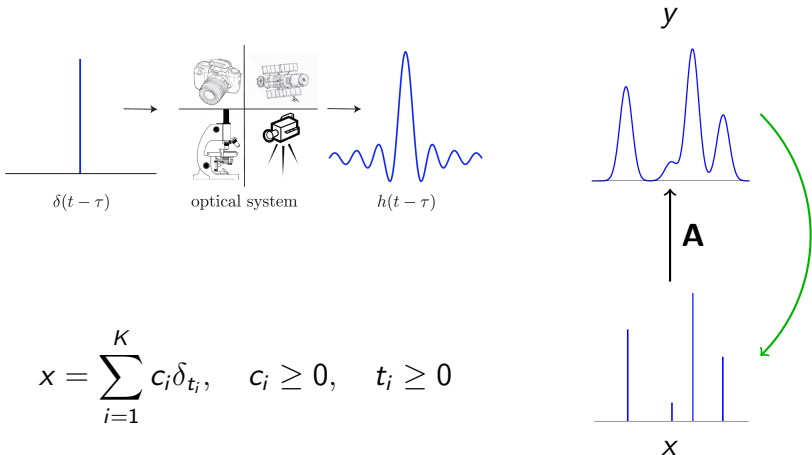
Motivations



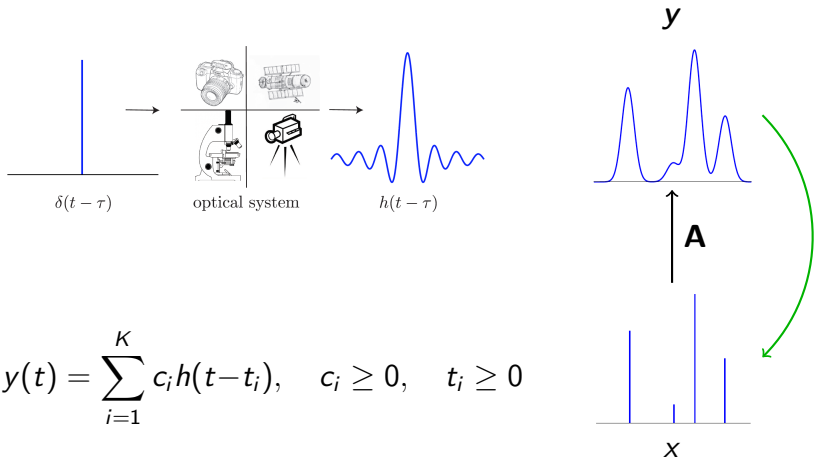
Diffraction et limite de Rayleigh



Super-résolution d'impulsions 1-D

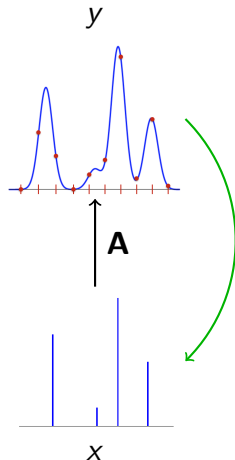


Super-résolution d'impulsions 1-D



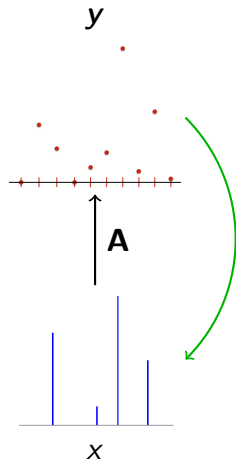
Données discrètes sur une grille

$$y = y(\tau_k), \quad \tau_k = k\Delta/N$$



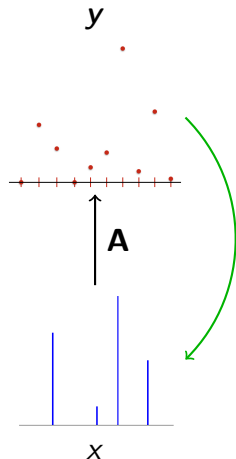
Données discrètes sur une grille

$$y = y(\tau_k), \quad \tau_k = k\Delta/N$$



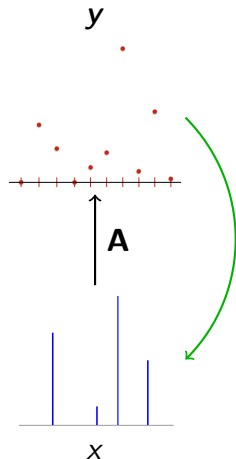
Reconstruction parcimonieuse sur la grille

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^K} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}\|_0$$



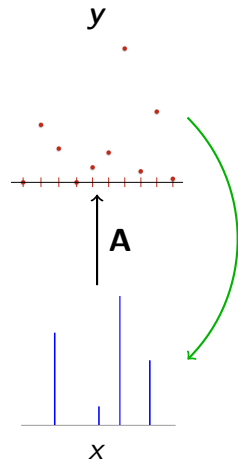
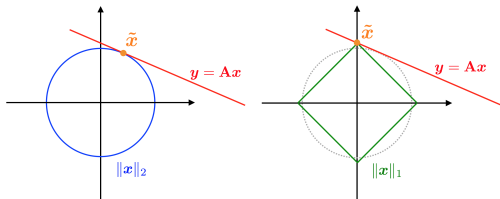
Reconstruction parcimonieuse **convexe** sur la grille

$$\min_{c \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{2} \|y - \mathbf{A}c\|_2^2 + \lambda \|c\|_1$$



Reconstruction parcimonieuse **convexe** sur la grille

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^K} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}\|_1$$



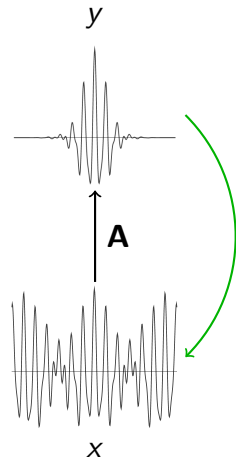
Super-résolution d'impulsions 1-D sans grille

$$\mathcal{F}x = \sum_{i=1}^K c_i e^{j2\pi f_i \omega}, \quad c_i \geq 0, \quad t_i \geq 0$$

Minimisation (régularisation convexe)

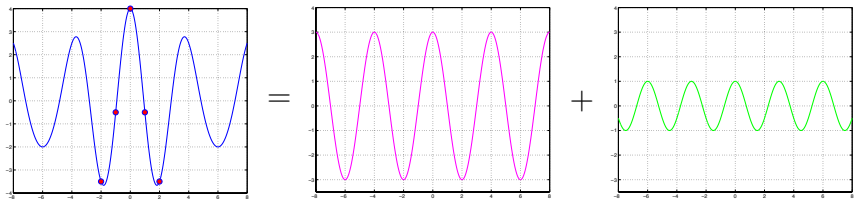
$$\arg \min_x \frac{1}{2} \|y - \mathbf{A}x\|^2 + \lambda \|x\|_1$$

Référence : (Tang, Bhaskar, Recht et coll., 2013)



Séparation de signaux

Objectif : extraire fréquence et amplitude des sinusoides.



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

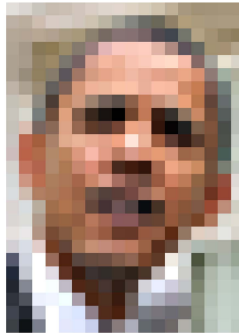
$$x_1(t) = 3 \exp\left(j2\pi \frac{1}{4} t\right)$$

$$x_2(t) = 1 \exp\left(j2\pi \frac{1}{3} t\right)$$

⇒ méthodes d'estimation spectrale (Prony, ESPRIT, MUSIC, ...)

Enhance it! Vers une super-résolution 2-D

Enhance it! Vers une super-résolution 2-D



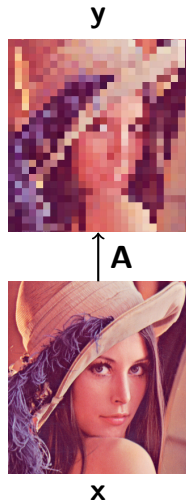
Enhance it! Super-résolution de lignes 2-D

Problème inverse

$$y = \mathbf{A}x$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- **A** = sous-échantillonnage
- **A** = flou
- ...



Problème inverse

$$y = Ax$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- **A** = sous-échantillonnage
- **A** = flou
- ...



Problème inverse

$$y = Ax$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- **A** = sous-échantillonnage
- **A** = flou
- ...

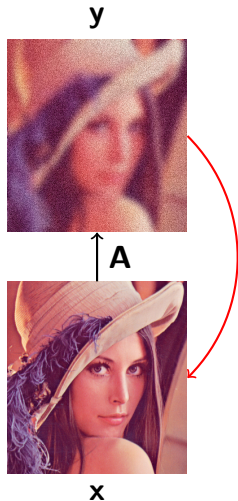


Problème inverse

$$y = Ax + \epsilon$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- **A** = sous-échantillonnage
- **A** = flou
- ...



Problème inverse

$$\mathbf{y} - \mathbf{Ax} = \boldsymbol{\epsilon}$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- \mathbf{A} = sous-échantillonnage
- \mathbf{A} = flou
- ...



Problème inverse

Minimisation (attache aux données)

Problème **mal posé** :

$$\arg \min_x \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- **A** = sous-échantillonnage
- **A** = flou
- ...



Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)



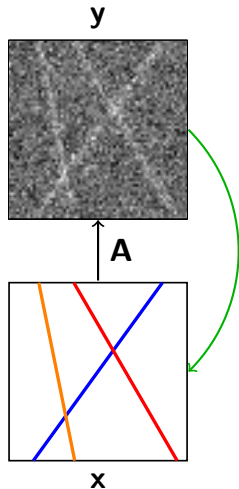
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

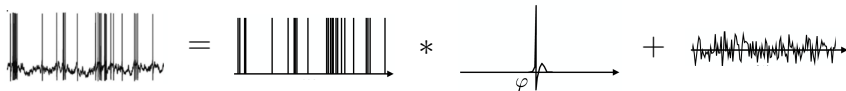
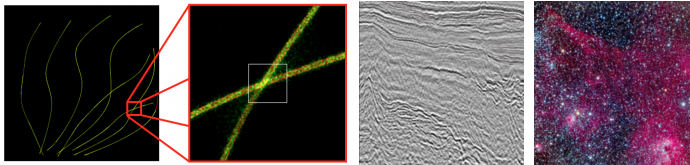
$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda R(\mathbf{x})$$

Exemple (Régulariseur)

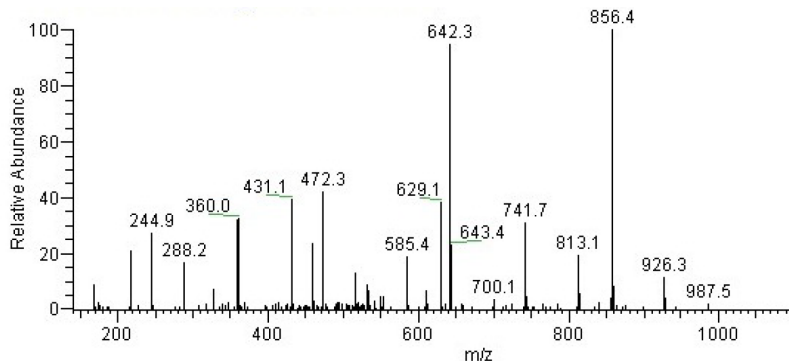
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)



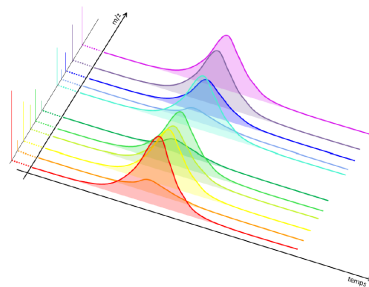
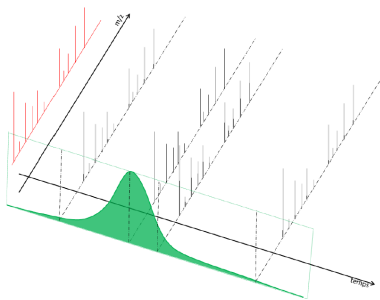
Diverses applications



Intérêts pour la spectroscopie de masse



Intérêts pour la spectroscopie de masse



Intérêts pour la spectroscopie de masse

Projet **Reveal-MS** :

- Démultiplexage (SAGA) \Rightarrow séparation de signaux
- Factorisation de chromatogramme
- CSS \Rightarrow dictionnaire d'atomes et enveloppe convexe
- Représentation parcimonieuse \Rightarrow réduction de dimensionnalité et factorisation de matrice de rang faible

Plan de l'exposé

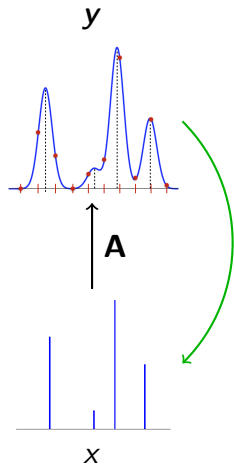
- 1 **Présentation générale**
 - Contexte des travaux de thèse
 - Principe de super-résolution
 - Intérêts pour la spectroscopie de masse

- 2 **Super-résolution de lignes 2-D diffractées et bruitées**
 - Modélisation des lignes diffractées et formulation d'un problème inverse
 - Résolution du problème d'optimisation convexe
 - Estimation spectrale des paramètres

Super-résolution d'impulsions 1-D sur une grille

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^K} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}\|_1$$

$$\mathbf{y} = y(\tau_k), \quad \tau_k = k\Delta/N \longrightarrow \tilde{x}_k$$



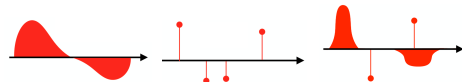
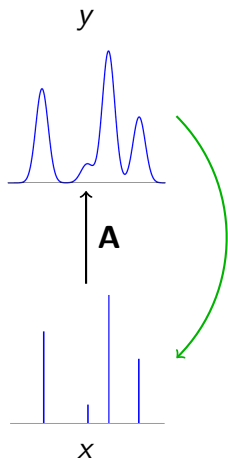
Super-résolution d'impulsions 1-D **sans grille**

$$x = \sum_{i=1}^K c_i \delta_{t_i}, \quad c_i \geq 0, \quad t_i \geq 0$$

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mu} \frac{1}{2} \|y - \mathbf{A}\mu\|^2 + \lambda \|\mu\|_{\text{TV}}$$

Référence : (Candès, Fernandez-Granda, 2012)



$$\|\mu\|_{\text{TV}} = \int |f| \quad \|x\|_{\text{TV}} = \|c\|_1$$

Super-résolution d'impulsions 1-D sans grille

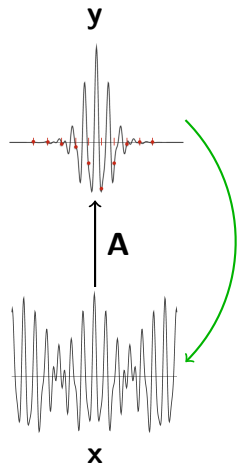
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K c_i \mathbf{a}(f_i), \quad c_i \geq 0, \quad \mathbf{a}(f_i) \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{a}(f) \in \mathbb{C}^N \}, \quad [\mathbf{a}(f)]_n = e^{j2\pi f n}$$

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$$

Référence : (Tang, Bhaskar, Recht et coll., 2013)



Super-résolution d'impulsions 1-D sans grille

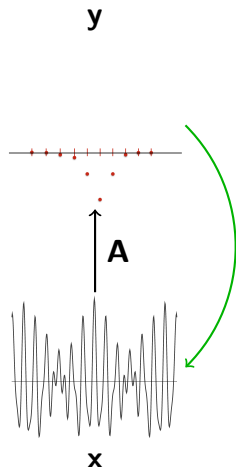
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K c_i \mathbf{a}(f_i), \quad c_i \geq 0, \quad \mathbf{a}(f_i) \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}(f) \in \mathbb{C}^N\}, \quad [\mathbf{a}(f)]_n = e^{j2\pi f n}$$

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$$

Référence : (Tang, Bhaskar, Recht et coll., 2013)



Paradigme de la décomposition atomique

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^K c_i \mathbf{a}_i, \quad c_i \geq 0, \quad \mathbf{a}_i \in \mathcal{A}$$

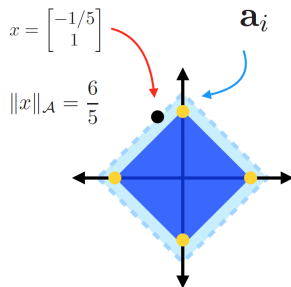
Norme atomique

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} &= \inf \{t > 0 : \mathbf{x} \in t\text{conv}(\mathcal{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} c_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} c_{\mathbf{a}} \mathbf{a} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \|\mathbf{x}\|_1$$

(Chandrasekaran et coll., 2010)



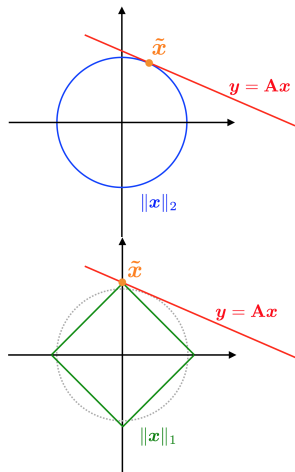
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)



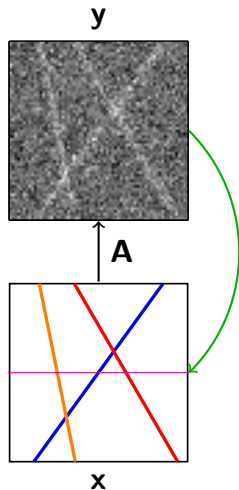
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda R(\mathbf{x})$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ parcimonie



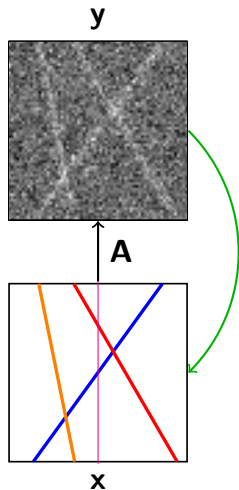
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 + \lambda R(\mathbf{x})$$

Exemple (Régulariseur)

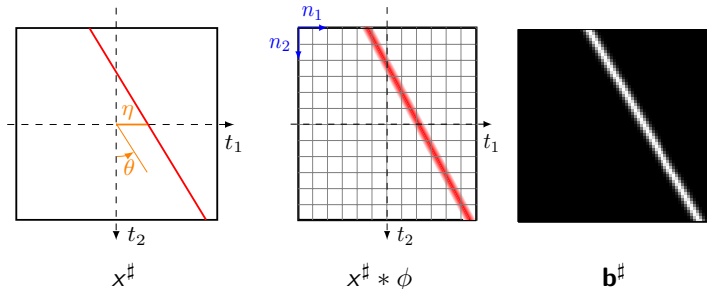
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ parcimonie



Modélisation des droites

$$x^\sharp : (t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \sum_{k=1}^K \alpha_k \delta(\cos \theta_k (t_1 - \eta_k) + \sin \theta_k t_2)$$

$$b^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2)$$

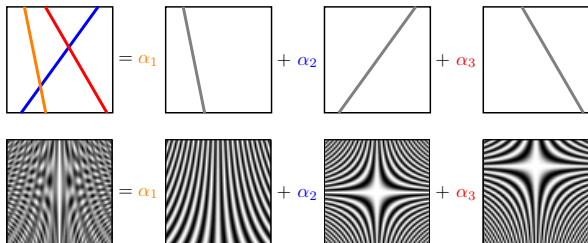


Modélisation des droites

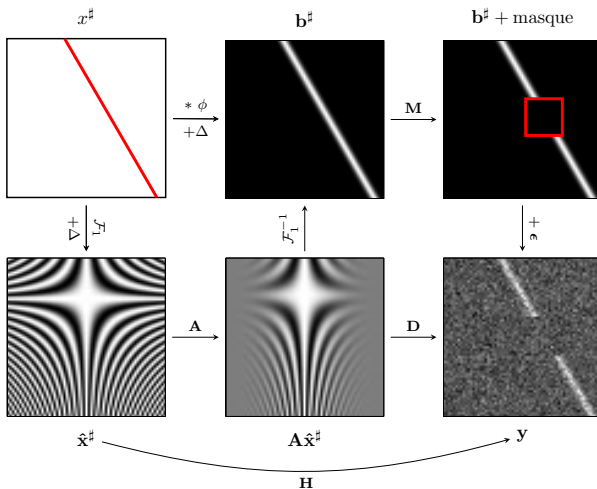
$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = (\mathcal{F}_1 \mathbf{x}^\sharp)[m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W} \right) m}$$

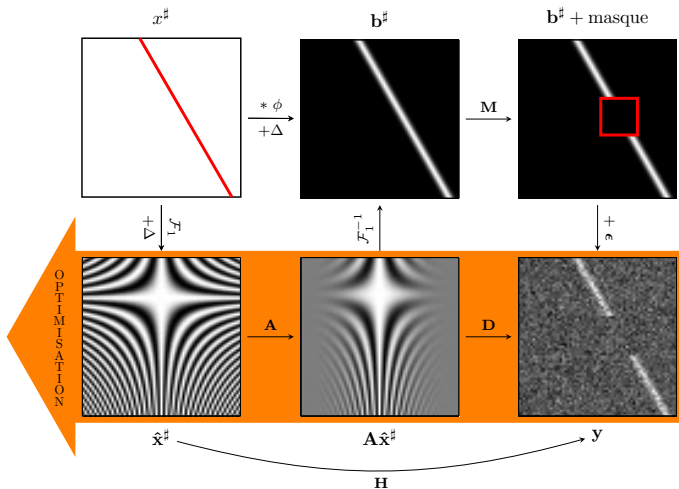
$$c_k = \frac{\alpha_k}{\cos \theta_k} \geq 0$$

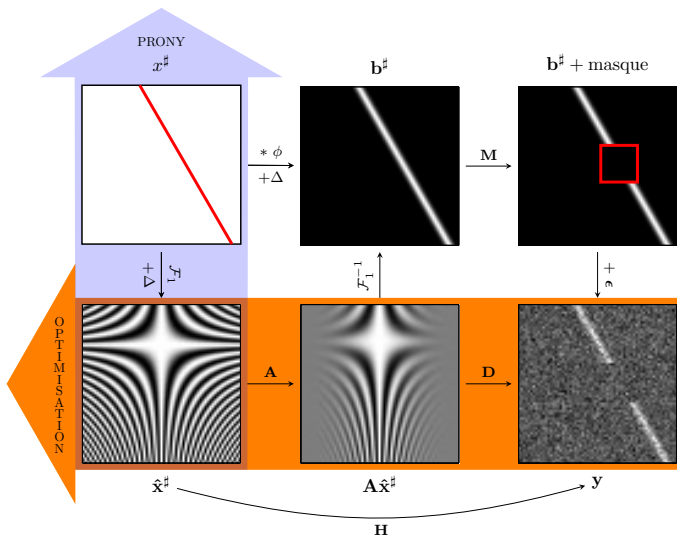
$$\hat{\mathbf{b}}^\sharp[m, :] = (\hat{\mathbf{g}}[m] \hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :]) * \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^\sharp = \hat{\mathbf{b}}^\sharp$$



Étapes de reconstruction







Décomposition atomique des lignes

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W} \right) m}$$

$$I_{n_2}^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[:, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2, k}, 0), \quad [\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi fi + \phi)} \in \mathcal{A}$$

Décomposition atomique des colonnes

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} m \right) n_2 + \frac{2\pi \eta_k m}{W}}$$

$$\mathbf{t}_m^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :] = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top, \quad [\mathbf{a}(f, \phi)]_i = e^{j(2\pi f i + \phi)} \in \mathcal{A}$$

Décomposition atomique des lignes et colonnes

$$\hat{\mathbf{x}}^\# [m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W} \right) m}$$

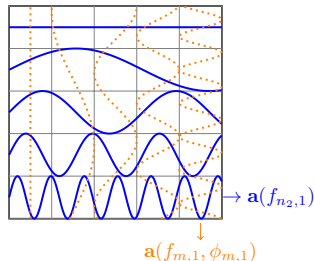
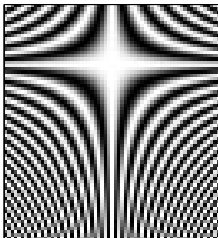
- 1 $l_{n_2}^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
- 2 $t_m^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)



Décomposition atomique d'une droite ($K = 1$)

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = c_1 e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_1}{W} n_2 + \frac{\eta_1}{W} \right) m}$$

- 1 $l_{n_2}^\sharp = c_1 \mathbf{a}(f_{n_2,1}, 0)$ (un atome **sans phase**)
- 2 $t_m^\sharp = c_1 \mathbf{a}(f_{m,1}, \phi_{m,1})^\top$ (un atome **avec phase**)



Normes atomiques

$$\hat{\mathbf{x}}^\# [m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W} \right) m}, \quad \mathbf{c}^* = \sum_{k=1}^K c_k$$

- 1 $\mathbf{l}_{n_2}^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
- 2 $\mathbf{t}_m^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)

Norme atomique :

$$\|z\|_{\mathcal{A}} = \inf_{c'_k, f'_k, \phi'_k} \left\{ \sum_k c'_k : z = \sum_k c'_k \mathbf{a}(f'_k, \phi'_k) \right\}$$



Normes atomiques

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{I}_{n_2}^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}, 0)$$

$\hookrightarrow \mathbf{T}_{M+1}(\mathbf{I}_{n_2}^\#) \succcurlyeq 0$ + de rang K (Carathéodory, 1907)

$\hookrightarrow \|\mathbf{I}_{n_2}^\#\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K c_k = \hat{\mathbf{x}}^\#[0, n_2]$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{t}_m^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top \quad (\text{Tang et coll., 2013})$$

$$\|\mathbf{t}_m^\#\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, t \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}_N(\mathbf{q})) + \frac{1}{2} t : \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{t}_m^\# \\ \mathbf{t}_m^{\#*} & t \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\} .$$



Normes atomiques

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{l}_{n_2}^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}, 0)$$

$\Leftrightarrow \mathbf{T}_{M+1}(\mathbf{l}_{n_2}^\#) \succcurlyeq 0$ + de rang K (Carathéodory, 1907)

$\Leftrightarrow \|\mathbf{l}_{n_2}^\#\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^K c_k = \hat{\mathbf{x}}^\#[0, n_2] = c^*$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{t}_m^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top \quad (\text{Polisano et coll., 2016})$$

$$\|\mathbf{t}_m^\#\|_{\mathcal{A}} = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N} \left\{ q_0 : \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\mathbf{q}) & \mathbf{t}_m^\# \\ \mathbf{t}_m^{\#*} & q_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}'_N(\mathbf{t}_m^\#, \mathbf{q})} \succcurlyeq 0 \right\} \equiv \text{SDP}(\mathbf{t}_m^\#),$$

$\Leftrightarrow \|\mathbf{t}_m^\#\|_{\mathcal{A}} = \text{SDP}(\mathbf{t}_m^\#) = \mathbf{q}_m[0] \leq c^*$



Normes atomiques

$$\hat{\mathbf{x}}^\# [m, n_2] = \sum_{k=1}^K c_k e^{j2\pi \left(\frac{\tan \theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W} \right) m}, \quad c^* = \sum_{k=1}^K c_k$$

- ① $\mathbf{l}_{n_2}^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
- ② $\mathbf{t}_m^\# = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)

Caractérisation (convexe) des K droites par la norme atomique

- ① $\|\mathbf{l}_{n_2}^\#\|_{\mathcal{A}} = c^* = \hat{\mathbf{x}}^\# [0, n_2]$ et $\mathbf{T}_{M+1}(\mathbf{l}_{n_2}^\#) \succcurlyeq 0$
- ② $\|\mathbf{t}_m^\#\|_{\mathcal{A}} = \text{SDP}(\mathbf{t}_m^\#) = \mathbf{q}_m[0] \leq c^*$, $\mathbf{T}'_{H_S}(\mathbf{t}_m^\#, \mathbf{q}_m) \succcurlyeq 0$



Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 ,$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 0, \dots, M , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{array} \right.$$



Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2,$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 0, \dots, M, \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c, \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0, \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0. \end{array} \right.$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(L_i(\mathbf{X})) \right\}$$



Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2,$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 0, \dots, M, \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c, \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0, \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0. \end{array} \right.$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(L_i(\mathbf{X})) \right\}$$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2,$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 0, \dots, M, \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c, \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0, \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0. \end{array} \right.$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(L_i(\mathbf{X})) \right\}$$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

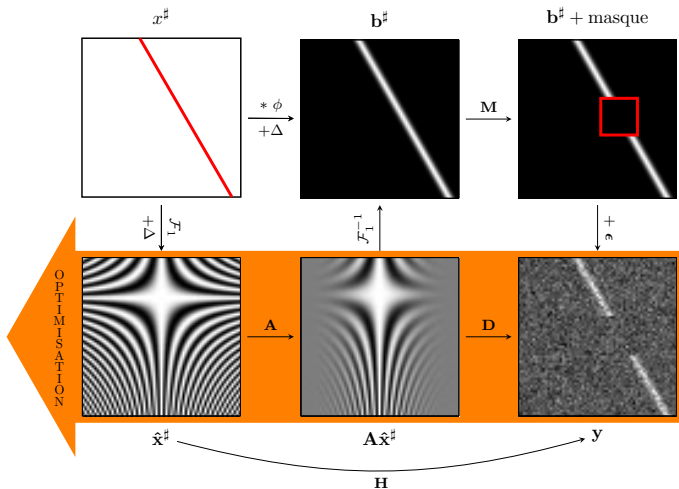
$$\tilde{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2,$$

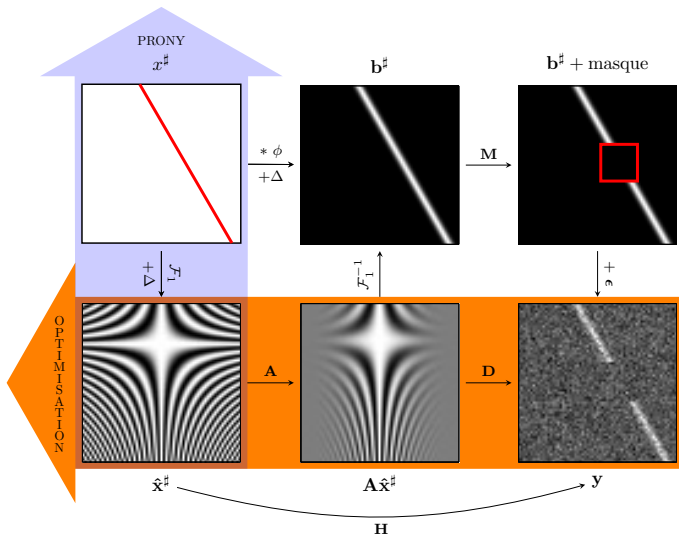
sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \forall m = 0, \dots, M, \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leq c, \\ \mathbf{q}[m, 0] \leq c, \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succeq 0, \\ \mathbf{T}'_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succeq 0. \end{array} \right.$$

(Chambolle et Pock, 2010)

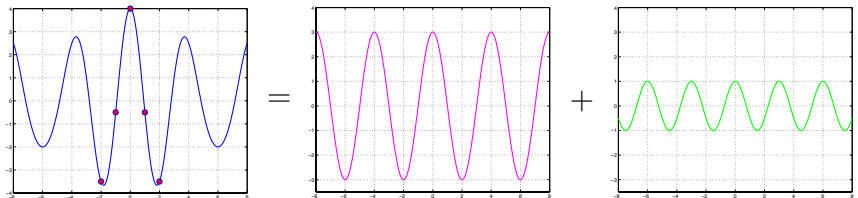
$$\tilde{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(L_i(\mathbf{X})) \right\}$$





Séparation de signaux

Objectif : extraire fréquence et amplitude des sinusoides.



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = 3 \exp\left(j2\pi \frac{1}{4} t\right)$$

$$x_2(t) = 1 \exp\left(j2\pi \frac{1}{3} t\right)$$

⇒ méthodes d'estimation spectrale (Prony, ESPRIT, MUSIC, ...)



Méthode de Prony

$$x_m = \sum_{k=1}^K \rho_k \underbrace{(e^{-j\omega_k})^m}_{z_k}, \quad \rho_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in [-\pi, \pi], m = -M, \dots, M$$

Filtre **annihilateur** : $H(z) = \prod_{k=1}^K (z - \bar{z}_k) = \sum_{k=0}^K h_k z^k$

$$\sum_{j=0}^K h_j x_{m-j} = \sum_{j=0}^K h_j \left(\sum_{k=1}^K \rho_k z_k^{m-j} \right) = \sum_{k=1}^K \rho_k z_k^m \underbrace{\left(\sum_{j=0}^K h_j z_k^{-j} \right)}_{H(\bar{z}_k)=0} = 0$$



Méthode de Prony : polynôme annihilateur

$$x_m = \sum_{k=1}^K \rho_k \underbrace{(e^{-j\omega_k})^m}_{z_k}, \quad \rho_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in [-\pi, \pi], m = -M, \dots, M$$

Filtre **annihilateur** : $H(z) = \prod_{k=1}^K (z - \bar{z}_k) = \sum_{k=0}^K h_k z^k$

- $\sum_{j=0}^K h_j x_{m-j} = 0, \forall m = -M + K, \dots, M \Leftrightarrow \mathbf{x} * \mathbf{h} = \mathbf{0}$

- $\begin{pmatrix} x_{-M+K} & \cdots & x_{-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M & \cdots & x_{M-K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{T}_K \mathbf{h} = \mathbf{0}$



Méthode de Prony : estimation des fréquences

$$x_m = \sum_{k=1}^K \rho_k \underbrace{(e^{-j\omega_k})^m}_{z_k}, \quad \rho_k \in \mathbb{C}, \omega_k \in [-\pi, \pi], m = -M, \dots, M$$

Filtre **annihilateur** : $H(z) = \prod_{k=1}^K (z - \bar{z}_k) = \sum_{k=0}^K h_k z^k$

- $h = \text{vec. sing. à } \lambda = 0 \text{ de } \mathbf{T}_K = \begin{pmatrix} x_{-M+K} & \cdots & x_{-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M & \cdots & x_{M-K} \end{pmatrix}$
- $\bar{z}_k = \text{racines du polynôme } H(z), \text{ puis } \omega_k = \arg(\bar{z}_k)$



Méthode de Prony : estimation des amplitudes

- $x_m = \sum_{k=1}^K \rho_k (e^{-j\omega_k})^m, \forall m = -M, \dots, M$

- $$\begin{pmatrix} e^{jM\omega_1} & \dots & e^{jM\omega_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jM\omega_1} & \dots & e^{-jM\omega_K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{-M} \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x}$$

Méthode des **moindre carrés** :

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{U}^H \mathbf{x} \iff \boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{x}$$

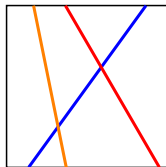


Expériences numériques

- Débruitage et déconvolution



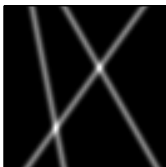
Exp. 1



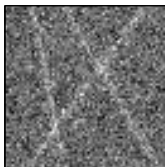
Détection

Expériences numériques

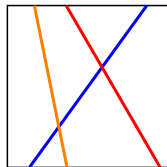
- Débruitage et déconvolution



Exp. 1



Exp. 2



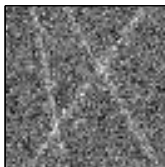
Détection

Expériences numériques

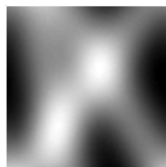
- Débruitage et déconvolution



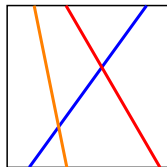
Exp. 1



Exp. 2



Exp 3.



Détection

Expériences numériques

- Débruitage et déconvolution

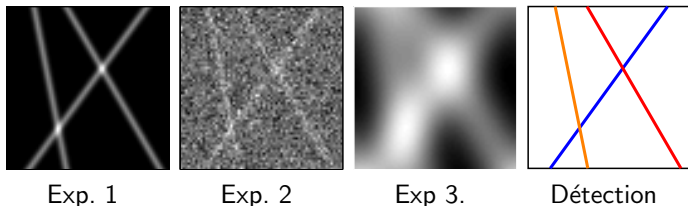


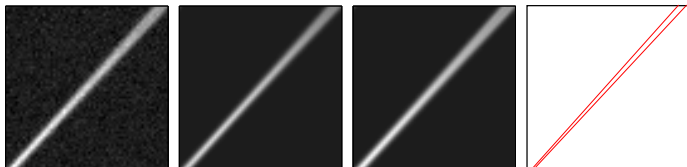
TABLE: Erreurs relatives de l'estimation des paramètres des lignes

	Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
Δ_{θ}/θ	$(10^{-7}, 3.10^{-6}, 7.10^{-7})$	$(10^{-2}, 6.10^{-2}, 9.10^{-2})$	$(6.10^{-7}, 9.10^{-5}, 8.10^{-6})$
Δ_{α}/α	$(10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7})$	$(10^{-2}, 9.10^{-2}, 2.10^{-1})$	$(4.10^{-5}, 2.10^{-5}, 2.10^{-5})$
Δ_{η}	$(4.10^{-6}, 7.10^{-6}, 7.10^{-6})$	$(5.10^{-2}, 4.10^{-2}, 3.10^{-2})$	$(5.10^{-5}, 10^{-4}, 3.10^{-4})$

Expériences numériques

Expériences numériques

- Lignes proches



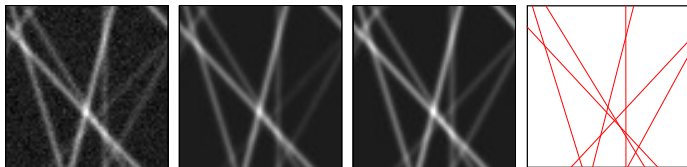
Bruitée

Débruitée

Sans bruit

Détection

- Lignes multiples



Bruitée

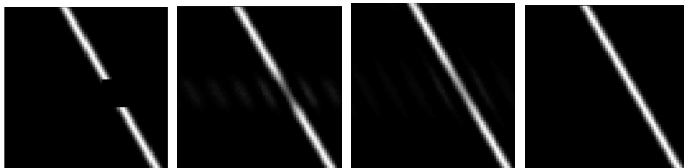
Débruitée

Sans bruit

Détection

Expériences numériques

- Inpainting spatial



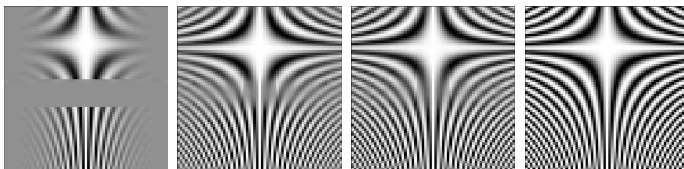
Masquage

iter = 2000

iter = 10000

iter $\rightarrow \infty$

- Inpainting en Fourier



Masquage

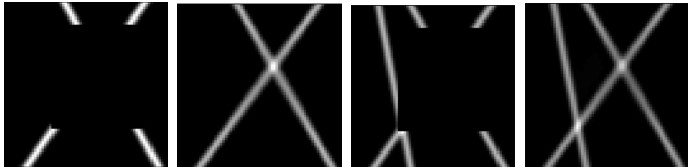
iter = 2000

iter = 10000

iter $\rightarrow \infty$

Expériences numériques

- Inpainting masquage important



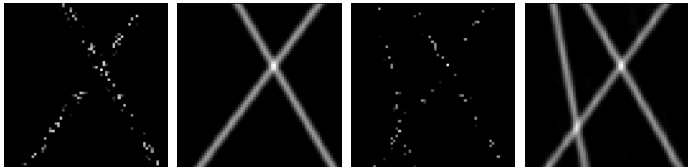
Masquage

Inpainting

Masquage

Inpainting

- Inpainting masquage aléatoire



Masquage

Inpainting

Masquage

Inpainting

Des questions ?

Merci de votre attention