Corrigé examen d'Analyse pour l'ingénieur - Session 1

Lundi 3 novembre 2014 - 1h30

Exercice 1 *Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on définit*

$$\|A\|_F = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

1. *Vérifier que $\|\cdot\|_F$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2. *Montrer que pour toutes matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les coefficients $(AB)_{ij}$ de la matrice produit AB vérifient*
$$|(AB)_{ij}|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right)$$

3. *En déduire que $\|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \|B\|_F$ pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

1. Vérifions que $\|\cdot\|_F$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

Méthode 1. On vérifie directement les 3 axiomes définissant une norme :

- Séparation :

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|A\|_F = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = 0 \\
&\overset{1}{\Leftrightarrow} \quad \forall a_{ij} \in \mathbb{C}, |a_{ij}| = 0 \\
&\overset{2}{\Leftrightarrow} \quad \forall a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{ij} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A = 0
\end{aligned}$$

[1] : Si deux nombres réels $a_1 \geqslant 0$ et $a_2 \geqslant 0$ sont tels que $a_1 + a_2 = 0$ alors $a_1 = -a_2 \leqslant 0$ et par antisymétrie de la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ il vient $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$. Par récurrence on montre de même que $\forall a_i \geqslant 0, \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.

[2] : du fait que le module complexe $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

- Homogénéité : De part la propriété du module complexe $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\lambda A\|_F = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(|\lambda|^2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|A\|_F$$

- Inégalité triangulaire : Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Le module complexe $|\cdot|$ vérifiant l'inégalité triangulaire on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant |a_{ij}| + |b_{ij}|$$

d'où par passage au carré :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{ij} + b_{ij}|^2 \leqslant |a_{ij}|^2 + |b_{ij}|^2 + 2|a_{ij}||b_{ij}|$$

On somme maintenant sur tous les termes $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2 + 2 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}||b_{ij}|$$

Rangeons les n^2 nombres réels positifs $|a_{ij}|$ (resp. $|b_{ij}|$) dans un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^+)^{n^2}$).

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}||b_{ij}| = | < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_{\mathbb{R}^{n^2}} | \leqslant \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |b_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Finalement on a ainsi

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij} + b_{ij}|^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|^2 + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |b_{ij}|^2 + 2 \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |b_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

c'est-à-dire :

$$\|A + B\|_F^2 \leqslant \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + 2\|A\|_F\|B\|_F = (\|A\|_F + \|B\|_F)^2$$

Par passage à la racine on obtient bien l'inégalité triangulaire :

$$\|A + B\|_F \leqslant \|A\|_F + \|B\|_F$$

Méthode 2. Soit E_{ij} la matrice où tous les termes sont nuls à l'exception du terme situé ligne i et colonne j qui vaut 1. Ces matrices élémentaires forment la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire :

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot E_{ij}$$

L'application linéaire u qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le vecteur de ses coefficients $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathbb{C}^{n^2}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^{n^2}$.

Soit N une norme sur $\mathbb{C}^{n^2}$, alors $N \circ u$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque :

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N \circ u(A) = 0 \Leftrightarrow u(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N \circ u(\lambda A) = 0 = N(\lambda u(A)) = |\lambda| N \circ u(A).$

- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N \circ u(A + B) = N(u(A) + u(B)) \leqslant N \circ u(A) + N \circ u(B).$

En remarquant donc simplement que

$$\|A\|_F = N_2 \circ u(A)$$

où A est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^{n^2}$, on a directement le résultat.

Méthode 3. Mieux encore on peut remarquer que la norme $\| \cdot \|_F$, appelée au passage norme de Frobenius (ou norme de Schur ou encore de Hilbert–Schmidt), dérive d'un produit scalaire hermitien :

$$< A, B >_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \equiv \varphi(A, B) = Tr(A^* B)$$

où $A^* = \bar{A}^T$ et Tr désigne la trace.

En effet l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est sesquilinéaire. De plus elle est définie positive car

$$Tr(A^* A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|^2 \geqslant 0$$

et on l'a vu cette quantité est nulle si et seulement si $A = 0$.

Donc $< A, B >_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = Tr(A^* B)$ définit bien un produit scalaire et

$$\|A\|_F = \sqrt{Tr(A^* A)}$$

est la norme associée à ce produit scalaire.

2. Les coefficients de la matrice produit sont

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Les propriétés du module complexe $|\cdot|$ donne :

$$|(AB)_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$$

Par Cauchy-Schwarz on a donc bien comme précédemment

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2 \right)^{1/2}$$

d'où

$$|(AB)_{ij}|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2 \right)$$

3. Par conséquent en somme sur tous les termes on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |(AB)_{ij}|^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2 \right) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |b_{lj}|^2 \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\|AB\|_F \leqslant \|A\|_F \|B\|_F$$

donc la norme de Frobenius est sous-multiplicative.

Exercice 2 *Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, donnée par $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. On définit sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:*

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \textit{si } x \textit{ et } y \textit{ sont colinéaires} \\ \|x\| + \|y\| & \textit{sinon} \end{cases}$$

1. *Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer et représenter graphiquement les boules fermées, associées à la distance d, suivantes : centre $0_{\mathbb{R}^2}$, rayon 1 ; centre $(1,0)$, rayon 1 ; centre $(1,0)$, rayon 2.*

1. Il est clair que d est symétrique. De même la séparabilité est directe puisque si $d(x,y) = 0$, dans un cas comme dans l'autre si x et y sont colinéaires $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$ et sinon $\|x\| + \|y\| = 0 \Rightarrow x = y = 0$. Pour l'inégalité triangulaire $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$ on doit traiter tous les cas suivants :

• les vecteur x, y, z sont deux à deux colinéaires.
• (y,z) colinéaires mais pas (x,y) et (x,z).
• (x,y) colinéaires mais pas (x,z) et (y,z).
• Aucun couple n'est formé de vecteurs colinéaires.

D'autres cas n'ont pas été considérés car ils se déduisent des précédents par symétrie des rôles. Enfin, la vérification de l'inégalité est immédiate dans chacun des cas présentés (elle se déduit de l'inégalité triangulaire pour la distance usuelle). Traitons au hasard l'avant dernier cas :

Exemple : (x,y) colinéaires donc $d(x,y)=\|x-y\|$; (x,z) et (y,z) non colinéaires donc $d(x,z)=\|x\|+\|z\|$ et $d(y,z)=\|y\|+\|z\|$. On a par l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne

$$d(x,y)=\|x-y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\leqslant\|x\|+\|y\|+2\|z\|=d(x,z)+d(y,z)$$

2. Décrivons géométriquement la boule fermée $B_d(x,r)$ pour $x\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$.

- Si x est à l'origine, $B_d(x,r)=B_{\|\cdot\|}(x,r)$.

- Si x n'est pas à l'origine
  (a) Si $r\leqslant d(x,0_{\mathbb{R}^2})$ alors $B_d(x,r)=S(x,r)$ où $S(x,r)$ est le segment de la droite passant par x et l'origine, centré en x et de longueur $2r$.
  (b) Si $r>d(x,0_{\mathbb{R}^2})$ alors $B_d(x,r)=S(x,r)\cup B_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2},r-d(x,0_{\mathbb{R}^2}))$

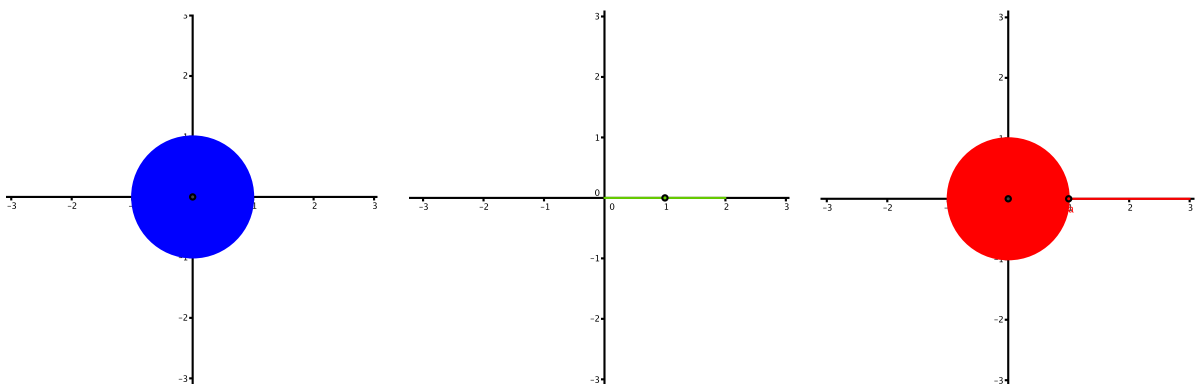

FIGURE 1 – $B_d((0,0),1)=B_{\|\cdot\|}((0,0),1)$; $B_d((1,0),1)=S((1,0),1)$; $B_d((1,0),2)=S((1,0),2)\cup B_{\|\cdot\|}((0,0),1)$

Exercice 3 *Soit* $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),f(0)=0\right\}$. *On munit* E *de la norme*

$$\|f\|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$$

et par ailleurs on définit sur E

$$N(f)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)+f'(x)|$$

1. *Montrer que* N *est une norme sur* E.

2. *Montrer que* $\forall f\in E, N(f)\leqslant\|f\|$.

3. *Montrer que* $\forall f\in E,\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\leqslant N(f)+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

4. *En remarquant que* $(f(x)e^x)'=(f'(x)+f(x))e^x$ *montrer que*

$$\exists c>0,\forall f\in E,\quad\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\leqslant cN(f)$$

5. *En déduire que* N *est une norme équivalente à* $\|\cdot\|$.

1. Montrons que N est une norme sur E :

• Séparation : Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$. Puisque $f \in E$, par définition $f(0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ donc f et f' sont continues sur $[0,1]$, de même pour $g = f + f'$ qui est donc continue sur le compact $[0,1]$ et donc atteint ses bornes. Ainsi il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [0,1], |g(x)| \leqslant |g(x_0)| = N(f)$ et comme $N(f) = 0$ on en déduit que $g = 0$ sur $[0,1]$ c'est-à-dire $f + f' = 0$. Cette équation différentielle aboutit à la famille de solution $f(x) = ke^{-x}$. Or puisque de surcroît $f(0) = 0$ on en tire $k = 0$ et donc $f = 0$. CQFD.

• Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall f \in E$ on a

$$N(\lambda f) = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\lambda f(x) + \lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) + f'(x)| = |\lambda| N(f)$$

• Inégalité triangulaire : Soit $(f,g) \in E^2$. On a par la propriété d'inégalité triangulaire de la valeur absolue

$$\forall x \in [0,1], |f(x) + g(x) + f'(x) + g'(x)| \leqslant |f(x) + f'(x)| + |g(x) + g'(x)| \leqslant N(f) + N(g)$$

Par passage au sup à gauche il vient donc

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$$

2. Soif $f \in E$. Comme ci-dessus on a :

$$\forall x \in [0,1], |f(x) + f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)| = \|f\|$$

Par passage au sup à gauche on obtient

$$N(f) \leqslant \|f\|$$

3. Soit $f \in E$. Toujours le même principe que ci-dessus :

$$\forall x \in [0,1], |f'(x)| = |f'(x) + f(x) - f(x)| \leqslant |f'(x) + f(x)| + |f(x)| \leqslant N(f) + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$$

Par passage au sup à gauche il vient

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)| \leqslant N(f) + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$$

4. Soit $f \in E$. Considérons $g(x) = f(x)e^x$ qui appartient toujours à E car $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $g(0) = f(0) \times 1 = 0$. Par ailleurs $\forall x \in [0,1], e^x \geqslant 1$ donc

$$\forall x \in [0,1], |g(x)| = |f(x)|e^x \geqslant |f(x)|$$

Par passage on a donc

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x)| \quad (*)$$

Par ailleurs considérons l'intervalle $[0,x]$ pour x fixé. g et g' sont continue sur $[0,x] \subset [0,1]$, et g' atteint ses bornes sur $[0,1]$ en un point $x_0 \in [0,1]$, donc on a *a fortiori* $\forall y \in [0,x], |g'(y)| \leqslant |g'(x_0)|$. L'inégalité des accroissements finis nous donne

$$|g(x) - g(0)| \leqslant |g'(x_0)||x| \leqslant |g'(x_0)|$$

Etant donné que $g(0) = 0$ et $|g'(x_0)| = |f'(x_0) + f(x_0)||e^{x_0}| \leqslant N(f)e$ on a alors :

$$|g(x)| \leqslant N(f)e$$

Ceci étant valable pour tout $x \in [0,1]$, par passage au sup on obtient

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x)| \leqslant N(f)e \quad (**)$$

En combinant $(*)$ et $(**)$ on en conclut :

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| \leqslant eN(f)$$

5. D'après la question 3. on a :

$$\|f\| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)| \leqslant N(f) + 2 \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$$

Et d'après la question 5. :

$$\|f\| \leqslant N(f) + 2eN(f) = (1+2e)N(f)$$

Cette inégalité ainsi que celle de la question 2. prouve que N et $\|\cdot\|$ sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 4 *Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Soit F une fonction lipschitzienne de constante 1 sur $\mathbb{R}$, et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : \mathbb{R}^+ \to R$,*

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = F(y(t)) \text{ pour } t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

On cherche à prouver l'existence d'une solution de (D), de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour cela, on considère l'application $T : E \to E$ qui à $g \in E$ associe la fonction Tg définie par

$$\forall t \geqslant 0, \quad (Tg)(t) = e^{-2t} \left(y_0 + \int_0^t F(e^{2s} g(s)) ds \right)$$

1. *Montrer que si g est un point fixe de T dans E, alors $h : t \mapsto e^{2t} g(t)$ est une solution de (D), de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.*

2. *Montrer que T est contractante de constante $\frac{1}{2}$ sur E.*

3. *Conclure quant à l'existence d'une solution (D) de $\mathbb{R}^+$.*

1. Soit g un point fixe de T, on a :

$$\forall t \geqslant 0, (Tg)(t) = g(t) \Leftrightarrow e^{-2t} \left(y_0 + \int_0^t F(e^{2s} g(s)) ds \right) = g(t)$$

Notons $h : t \mapsto e^{2t} g(t)$, alors la dernière égalité se réécrit :

$$\forall t \geqslant 0, y_0 + \int_0^t F(h(s)) ds = h(t)$$

On a donc d'une part $h(0) = y_0$. D'autre part la fonction $F \circ h$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car F et h le sont, donc $t \mapsto \int_0^t F \circ h(s) dx$ est dérivable de dérivée $t \mapsto F(h(t))$ qui est continue. Ainsi h est dérivable et continue donc $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} h'(t) = F(h(t)) \text{ pour } t > 0 \\ h(0) = y_0 \end{array} \right.$$

On vient de montrer que si il existe un point fixe g de T dans E alors $h : t \mapsto e^{2t}$ est une solution de (D) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit f et g deux fonctions de E.

$$\begin{aligned}
\forall t > 0, |Tf(t) - Tg(t)| &= \left| e^{-2t} \int_0^t [F(e^{2s} f(s)) - F(e^{2s} g(s))] ds \right| \\
&\leqslant e^{-2t} \int_0^t \left| F(e^{2s} f(s)) - F(e^{2s} g(s)) \right| ds \\
&\overset{1}{\leqslant} e^{-2t} \int_0^t \left| e^{2s} (f(s) - g(s)) \right| ds \\
&\overset{2}{\leqslant} e^{-2t} \|f - g\|_\infty \int_0^t e^{2s} ds \\
&\leqslant e^{-2t} \|f - g\|_\infty \left[\frac{1}{2} e^{2s} \right]_0^t \\
&\leqslant e^{-2t} \|f - g\|_\infty \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \\
&\leqslant e^{-2t} \|f - g\|_\infty \frac{1}{2} e^{2t} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty
\end{aligned}$$

[1] : car F est 1-lipschitzienne.

[2] : car $|f(s)-g(s)| \leqslant \|f-g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leqslant M_1+M_2 = M$ car f et g bornées.

Par passage au sup dans l'inégalité on obtient :

$$\|Tf - Tg\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

Ainsi T est contractante de constante $\frac{1}{2}$ sur E.

3. Pour appliquer le théorème du point fixe il faut que les hypothèses suivantes soient réunies :

- T est contractante sur $E \Rightarrow$ OK d'après la question 2.

- T est une application de E dans E.

(a) Soit $g \in E$, les fonctions $s \mapsto g(s)$, $s \mapsto e^{2s}$ et F sont continues (F est lischitzienne donc continue) donc $s \mapsto F(e^{2s}g(s))$ est continue donc intégrable sur $[0,t]$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^t F(e^{2s}g(s))ds$ est continue. Comme $t \mapsto e^{-2t}$ est continue on a finalement

$$t \mapsto Tg(t) = e^{-2t}\left(y_0 + \int_0^t F(e^{2s}g(s))ds\right) \text{ continue}$$

(b) Montrons maintenant que Tg est bornée. En effet on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t F(e^{2s}g(s))ds\right| &= \left|\int_0^t [F(e^{2s}g(s)) - F(0) + F(0)]ds\right| \\
&\leqslant \int_0^t |F(e^{2s}g(s)) - F(0)|ds + |F(0)|t \\
&\leqslant \int_0^t |e^{2s}g(s) - 0|ds + |F(0)|t \\
&\leqslant \|g\|_\infty \left[\frac{1}{2}e^{2s}\right]_0^t + |F(0)|t \\
&\leqslant \|g\|_\infty \frac{1}{2}(e^{2t}-1) + |F(0)|t
\end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$|Tg(t)| \leqslant e^{-2t}y_0 + \frac{1}{2}\|g\|_\infty(1-e^{-2t}) + |F(0)|te^{-2t}$$

Et cette fonction majorante tend vers $\frac{1}{2}\|g\|_\infty$ quand $n \to +\infty$.

Ainsi Tg est continue et bornée donc l'application T va bien de E dans E.

- E est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Notons B l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a $E \subset B$.

On va montrer que (a) B est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et (b) E est un fermé de B.

(a) B est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans B. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x_1) - f_m(x_1)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|$$

Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans B,

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N, \|f_n - f_m\| \leqslant \epsilon \quad (*)$$

Donc d'après l'inégalité précédente,

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N, |f_n(x_1) - f_m(x_1)| \leqslant \epsilon \quad (**)$$

Ainsi la suite $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ qui est complet, donc possède une limite dans $\mathbb{R}$ que nous notons $f(x_1)$.

De cette façon nous avons défini une fonction $f : x_1 \mapsto f(x_1)$. Reste à démontrer que f appartient à B.

En faisant tendre $m \to +\infty$ dans l'inégalité $(*)$ il vient :

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x_1 \in \mathbb{R}, |f_n(x_1) - f(x_1)| \leqslant \epsilon$$

ce qui prouve d'une part que (f_n) converge uniformément vers f.

D'autre part puisque $f_N \in B$ elle est bornée $\forall x_1 \in \mathbb{R}, |f_N(x_1)| \leqslant \|f_N\| \leqslant M$. D'où

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, |f_N(x_1) - f(x_1)| \leqslant \epsilon \Rightarrow \forall x_1 \in R, |f(x_1)| \leqslant M + \epsilon$$

Ainsi f est bornée donc appartient à B. On en conclut que B est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(b) E est un fermé de B.

Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E et $f \in B$ tel que

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrons qu'alors f appartient à E c'est-à-dire qu'elle est continue.

Pour cela nous allons utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité : soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tendant vers $x \in R$, montrons que $f(x_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} f(x)$.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\|f_n - f\| \to 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \|f_n - f\| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$.

Ensuite puisque $f_N \in E$, elle est continue donc $\forall m \geqslant M, |x - x_m| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_m)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$.

Puis en décomposant de la façon suivante :

$$\forall m \geqslant M, |f(x) - f(x_m)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_m)| + |f_N(x_m) - f(x_m)| \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Par conséquent f est bien continue donc E est un fermé de B, qui est complet, donc E est également complet.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, on en déduit que T admet un unique point fixe dans E. Notons g le point fixe de T. Alors d'après la question 1. la fonction $h : t \mapsto g(t)e^{2t}$ est solution de (D) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Nous venons de prouver l'existence d'une solution d'un système différentiel d'ordre 1 avec F une fonction 1-lipschitzienne, qui est une version affaiblie du théorème de Cauchy-Lipschitz.