TD (Thème Statistiques)

Exercice 1 (Fraude et statistiques) On suppose qu'il y a une probabilité égale à p d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Mr Bernoulli fait n voyages par an sur cette ligne.

1. On suppose que $p = 0.10$, $n = 700$.
   - Quelle est la probabilité que Mr Bernoulli soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
   - Mr Bernoulli voyage en fait toujours sans ticket. Afin de prendre en compte la possibilité de faire plusieurs passages avec le même ticket, on suppose que le prix d'un ticket est de 1.12 euros. Quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?
2. On suppose que $p = 0.5$, $n = 300$. Mr Bernoulli voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket est de 1.12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

Exercice 2 (Notes) Voulant évaluer rapidement les résultats obtenus par ses 200 étudiants lors d'un partiel, un professeur décide de corriger quelques copies tirées au hasard. Il apprend de sa collègue corrigeant l'autre moitié de la promo que les notes sont dispersées avec une variance égale à 4, et admet qu'elles suivent une loi normale dont il veut estimer la moyenne.

1. Le professeur corrige un échantillon de 7 copies et trouve une moyenne de 11. Quel est l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne des 200 copies ?
2. Combien de copies le professeur doit-il corriger s'il veut situer la moyenne générale de ses élèves dans un intervalle de confiance d'amplitude 2, avec un risque de 5% ?
3. En trouvant une moyenne égale à 11, combien de copies devrait- il corriger pour pouvoir dire, avec un risque de 1%, que la moyenne de tous les élèves est supérieure à 10 ?

Exercice 3 (Porte alcootest) Après une journée de vendanges dans cette vigne, Mr Brown rentre parfois chez lui en zigzaguant. Une fois devant sa porte, il sort de sa poche un trousseau de $k \geq 2$ clefs, dont une seule ouvre la porte. Lorsqu'il est à jeun, il essaye une des clefs au hasard, puis, si elle ne fonctionne pas, la met de côté et essaye une des clefs restantes, répétant cette opération après chaque échec. Tandis que lorsqu'il est ivre, il recommence avec cette fois le trousseau complet.
On note A l'évènement « Mr Brown est à jeun » et B l'évènement « Mr Brown est ivre ».

1. Calculer, sachant que Mr Brown est à jeun, la probabilité qu'il parvienne à ouvrir la porte au terme exactement de $n > 0$ tentatives. On désigne par X_A la variable aléatoire représentant le nombre d'essais nécessaires pour parvenir à ouvrir la porte quand il est à jeun. Quelle loi suit la variable X_A ? Que vaut son espérance ?
2. Mêmes questions sachant que Mr Brown est ivre avec la variable aléatoire X_B.
3. On suppose que Mr Brown a la même probabilité de rentrer à jeun ou ivre $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Calculer la probabilité p_n qu'il soit ivre, sachant qu'il est parvenu à ouvrir la porte au terme d'exactement n essais. On notera U_n l'évènement « Mr Brown a ouvert la porte au terme de n essais exactement » et on distinguera les cas où $n \leq k$ et $n > k$. *Indice : utilisez la formule de Bayes.*