

# MODÉLISATIONS DE TEXTURES PAR CHAMP GAUSSIEN À ORIENTATION LOCALE PRESCRITE

KÉVIN POLISANO, MARIANNE CLAUSEL, VALÉRIE PERRIER ET LAURENT CONDAT

contact mail : kevin.polisano@imag.fr



## OBJECTIFS

Présenter une nouvelle classe de *champs browniens fractionnaires localement anisotropes* (CBFLA)

- à orientation locale prescrite en chaque point.
- version locale de champs anisotropes autosimilaires à incréments stationnaires.
- simulés en couplant la notion de champs tangents à la méthode de Cholesky ou la méthode des bandes tournantes [2].

## CHAMP ANISOTROPE GLOBAL

Le *champ brownien fractionnaire* (CBF)  $B^H$  d'indice de Hurst  $H \in (0, 1)$ , est l'unique champ gaussien à accroissement stationnaires, autosimilaire d'ordre  $H$  et isotrope, i.e :

- $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, B^H(\cdot + \mathbf{z}) - B^H(\mathbf{z}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^H(\cdot) - B^H(0)$ ,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, B^H(\lambda \cdot) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lambda^H B^H(\cdot)$ ,
- Pour toute rotation  $R$  de  $\mathbb{R}^2, B^H \circ R \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^H$ ,

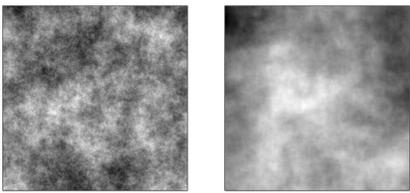


FIGURE 1 –  $H = 0.2$  (à gauche) et  $H = 0.7$  (à droite)

A partir de sa représentation harmonisable :

$$B^H(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} - 1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} d\widehat{W}(\boldsymbol{\xi})$$

on introduit de l'anisotropie en confinant les composantes fréquentielles de la densité spectrale  $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = c_{\alpha_0, \alpha}(\arg \boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-H-1}$  dans un cône :

$$B_{\alpha_0, \alpha}^H(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} - 1) \frac{\mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} d\widehat{W}(\boldsymbol{\xi})$$

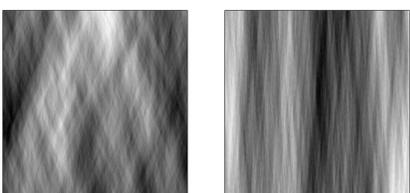


FIGURE 2 – Champ élémentaire  $B_{\alpha_0, \alpha}^H$  avec  $\alpha_0 = 0$  (vertical),  $H = 0.5$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  (à gauche)  $\alpha = \frac{\pi}{24}$  (à droite)

## CHAMP TANGENT

Un champ aléatoire  $X$  est dit localement asymptotiquement autosimilaire d'ordre  $H$  en  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  si

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2, \rho^{-H}(X(\mathbf{x}_0 + \rho \mathbf{h}) - X(\mathbf{x}_0)) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} Y_{\mathbf{x}_0}$$

$Y_{\mathbf{x}_0}$  est le champ tangent de  $X$  en  $\mathbf{x}_0$  et  $X \underset{\mathbf{x}_0}{\sim} Y_{\mathbf{x}_0}$  [3].

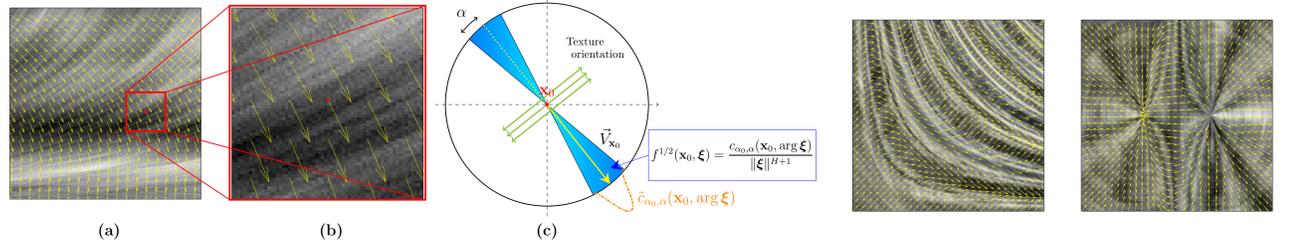
**Théorème.** Le CBFLA admet pour champ tangent

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} - 1) \frac{\mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0(\mathbf{x}_0))}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} d\widehat{W}(\boldsymbol{\xi})$$

## RÉFÉRENCES

- [1] K. Polisano *et al.*, Texture modeling by gaussian fields with prescribed local orientation, IEEE ICIP, 2014.
- [2] H. Biermé *et al.*, A turning band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields, Journal of Computational and Graphical Statistics, 2014.
- [3] K. Falconer, Tangent field and the local structure of random fields, Journal of theoretical probability, 2002.

## DÉFINITION ET ILLUSTRATION DU CBFLA



**Définition.** Le CBFLA [1] est défini comme une adaptation locale du champ élémentaire par :

$$B_{\alpha_0, \alpha}^H(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} - 1) \frac{\mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0(\mathbf{x}))}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} d\widehat{W}(\boldsymbol{\xi})$$

$\alpha_0$  est maintenant une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

Le champ tangent d'un CBFLA (a) au point  $\mathbf{x}_0$  (en rouge) à orientation prescrite  $\alpha_0(\mathbf{x}_0)$  (en jaune) est un champ élémentaire (b) de même orientation. Le cône fréquentiel  $c_{\alpha_0, \alpha}(\arg \boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0(\mathbf{x}_0))$  et la densité spectrale  $f^{1/2}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi})$  sont représentés en (c).

## DEUX MÉTHODES DE SIMULATION DES CHAMPS ÉLÉMENTAIRES

On simule le champ élémentaire  $Y_{\mathbf{x}_0} = B_{\alpha_0(\mathbf{x}_0), \alpha}^H$  sur une grille discrète  $r^{-1}\mathbb{Z}^2 \cap [0, 1]^2$ ,  $r = 2^k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ .

### Méthode de Cholesky

- 1 Matrice de covariance  $r^2 \times r^2$  à partir du variogramme  $v_{Y_{\mathbf{x}_0}}$  connu explicitement :

$$\text{Cov}(Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}), Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y})) = v_{Y_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{x}) + v_{Y_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{y}) - v_{Y_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

- 2 Décomposition de Cholesky  $\Sigma = LL^T$
- 3 Réalisation  $Y_{\mathbf{x}_0} \sim LZ$  où  $\mathbf{Z} \sim (\mathcal{N}(0, 1))^{r^2}$

### Méthode des bandes tournantes

- 1 Formulation discrète du champ tangent

On dérive dans [2] une expression intégrale de  $v_{Y_{\mathbf{x}_0}}$  par un changement de variable en polaire

$$\begin{aligned} v_{Y_{\mathbf{x}_0}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} - 1|^2 f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \gamma(H) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c_{\alpha_0, \alpha}(\mathbf{x}_0, \theta) |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}(\theta)|^{2H} d\theta \end{aligned}$$

$\mathbf{u}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\gamma(H) = \frac{\pi}{2H\Gamma(2H)\sin(H\pi)}$ .  $\tilde{v}_\theta = \gamma(H)c_{\alpha_0, \alpha}(\mathbf{x}_0, \theta) \cdot |\cdot|^{2H}$  est le variogramme d'un CBF d'ordre  $H$ .  $Y_{\mathbf{x}_0}$  peut être vu comme une somme de CBF tournant autour de l'origine. En discrétisant  $\theta$  en  $n$  bandes d'orientation  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$ , et notant  $\lambda_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ , les champs à bandes tournantes s'écrivent

$$Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \gamma(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i c_{\alpha_0, \alpha}(\mathbf{x}_0, \theta_i)} B_i^H(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}(\theta_i))$$

où les  $B_i^H$ 's sont  $n$  CBF d'ordre  $H$ .

- 2 Simulation le long de bandes particulières

On choisit  $\theta_i$  tel que  $\tan(\theta_i) = \frac{p_i}{q_i}$ ,  $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\left\{ B_i^H \left( \frac{k_1}{r} \cos \theta_i + \frac{k_2}{r} \sin \theta_i \right); 0 \leq k_1, k_2 \leq r \right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left( \frac{\cos \theta_i}{r q_i} \right)^H \{ B_i^H(k_1 q_i + k_2 p_i); 0 \leq k_1, k_2 \leq r \}$$

$B_i^H(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}(\theta_i))$  peut ainsi être généré en utilisant l'algorithme de Perrin sur une grille régulière.

- 3 Choix dynamique des bandes discrètes

En pratique, le choix des bandes d'orientation  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$  est gouverné par le coût de calcul global des  $B_i^H$ , au travers de la programmation dynamique [2].

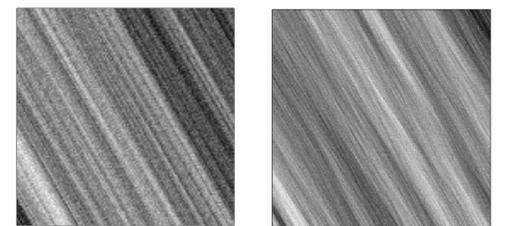


FIGURE 3 – Champ élémentaire de paramètres  $H = 0.2$ ,  $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$  et  $\alpha = 0.1$  simulé par (a) la méthode de Cholesky, (b) la méthode des bandes tournantes.

## SIMULATION DU CBFLA

En chaque pixel  $\mathbf{x}_0$ , on affecte  $B_{\alpha_0(\mathbf{x}_0), \alpha}^H(\mathbf{x}_0) = Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$  obtenu par la méthode de Cholesky ou des bandes tournantes.

**Algorithme :** Simulation par bandes tournantes

- Entrées:**  $r = 2^k - 1$ ,  $H$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon$   
**Sortie:**  $X$  CBFLA de taille  $(r+1) \times (r+1)$
- 1:  $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n} \leftarrow \text{ChoixBandesDynamique}(r, \epsilon)$
  - 2: Calculer et trier les angles  $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$  :  $\theta_i \leftarrow \text{atan2}(p_i, q_i)$
  - 3: Calculer les largeurs de bandes  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  :  $\lambda_i \leftarrow \theta_{i+1} - \theta_i$
  - 4: Générer  $n$  CBF :  $B_i^H \leftarrow \text{circMBF}(r(|p_i| + |q_i|), H)$
  - 5: Initialisation :  $X \leftarrow 0$
  - 6: **Pour tout**  $(k_1, k_2)$  **faire**
  - 7:   **Pour**  $i = 1$  **à**  $n$  **faire**
  - 8:      $\omega_i \leftarrow \sqrt{\lambda_i \gamma(H) c_{\alpha_0, \alpha}((k_1, k_2), \theta_i)} \left( \frac{\cos \theta_i}{r q_i} \right)^H$
  - 9:      $X(k_1, k_2) \leftarrow X(k_1, k_2) + \omega_i B_i^H(k_1 q_i + k_2 p_i)$
  - 10:   **Fin Pour**
  - 11: **Fin Pour**

L'étape de pré-traitement 1–4, qui ne dépend pas des orientations locales, est exécutée une fois pour toutes. Une version régularisée  $\tilde{c}_{\alpha_0, \alpha}(\mathbf{x}_0, \arg \boldsymbol{\xi})$  de la fonction caractéristique limite les artefacts [1].

	Cholesky	Bandes
Type	exact	approximation
Image	limite $\sim 256$	grande
Artefacts	non	oui
Complexité	$O(r^8)$	$O(r^2 \log n)$
Rendu	fig. 4(b)	fig. 4(a)

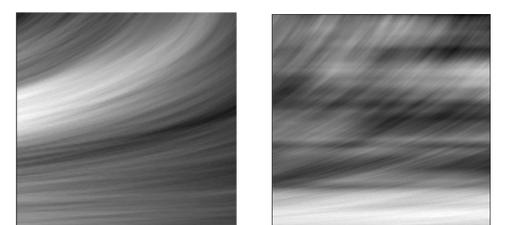


FIGURE 4 – Texture obtenue pour  $H = 0.7$ ,  $\alpha_0(x_1, x_2) = -\pi/2 + x_2$  et  $\alpha = 10^{-1}$  (a) par Cholesky (b) par bandes tournantes : bandes d'artefacts.