LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE

Communauté UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Textures orientées et lignes dans les images
Analyse, synthèse et super-résolution

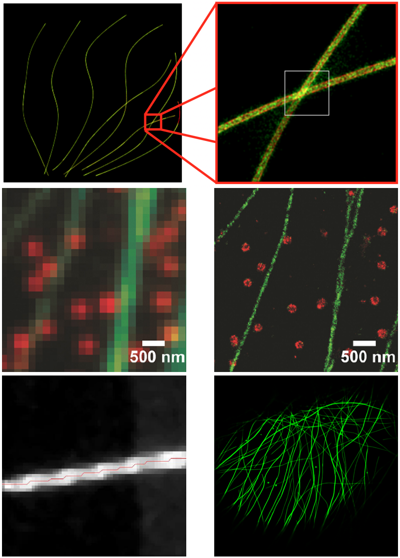
12 décembre 2017

Kévin Polisano

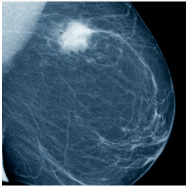
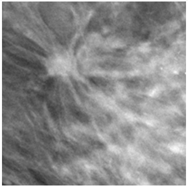
Membres du jury

Anne Estrade	(Univ. Paris Descartes)	Valérie Perrier	(Directrice de thèse)
Annick Montanvert	(Univ. Grenoble Alpes)	Marianne Clausel	(Co-encadrante)
Gabriel Peyré	(ENS Paris)	Laurent Condat	(Co-encadrant)
Frédéric Richard	(Univ. Aix Marseille)		
Pierre Weiss	(Univ. Toulouse)		

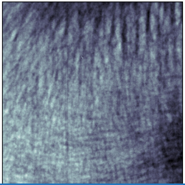
Motivations



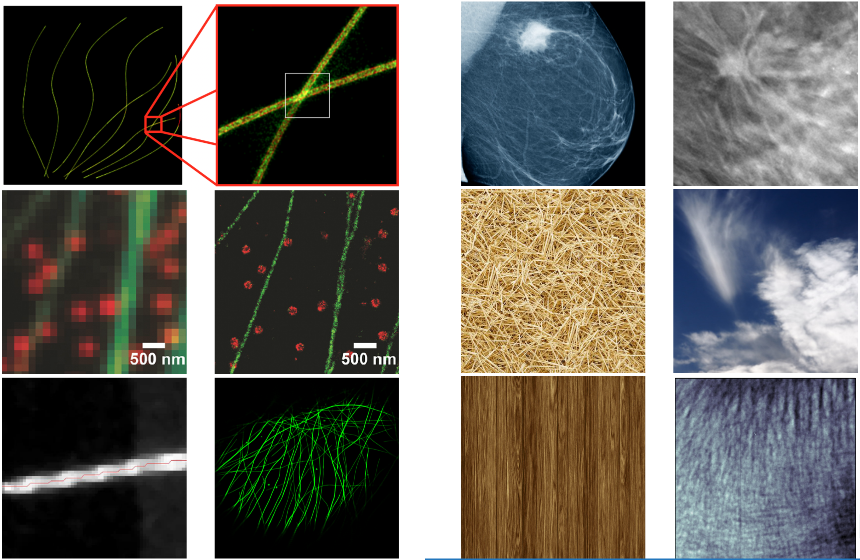
Motivations

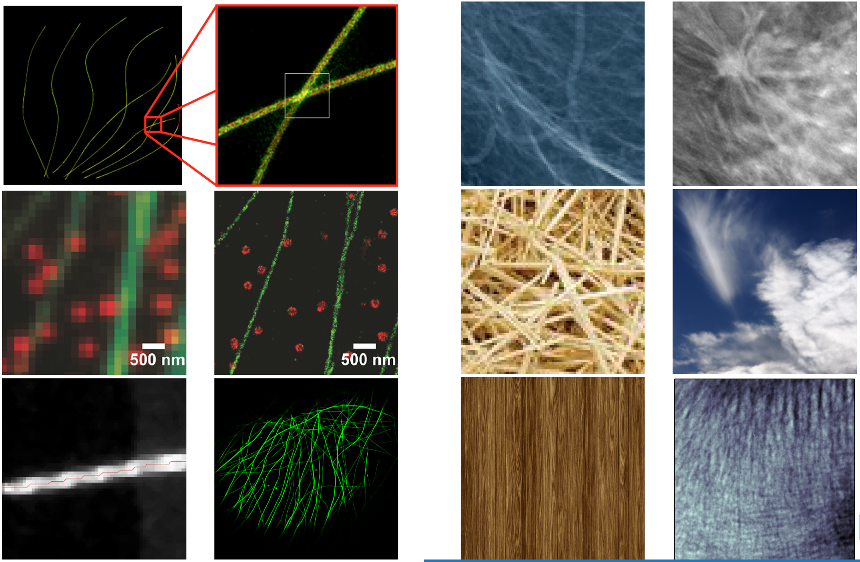




Motivations

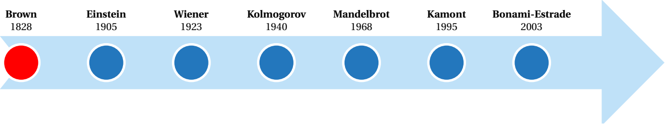


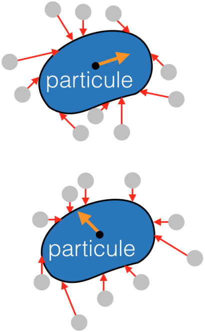
Motivations



Plan de l'exposé

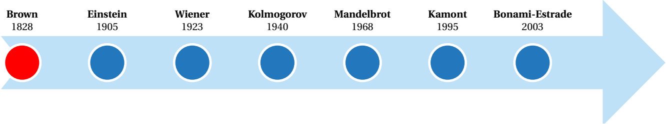
Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



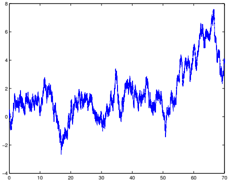


- déplacements indépendants
- distribution gaussienne
- trajectoire irrégulière

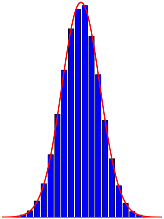
Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



Déplacements indépendants

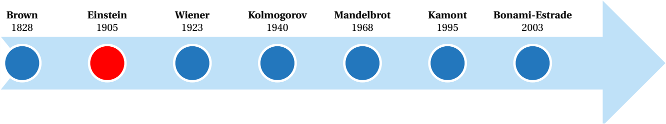


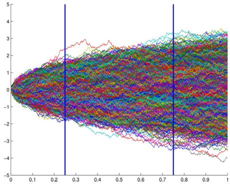
Trajectoire irrégulière

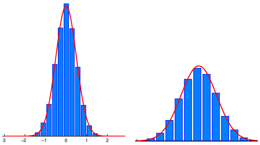


Distribution gaussienne

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes

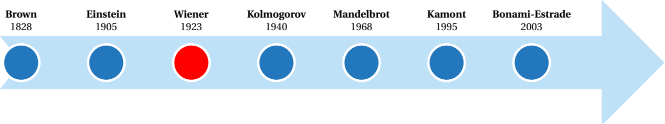






$$\overline{(\Delta x)^2} \propto t$$

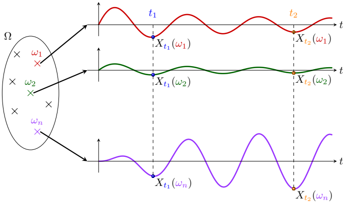
Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



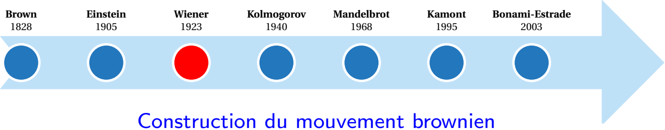
Mouvement brownien

- $(B_t)_t$ est à accroissements indépendants, $B_0 = 0$ p.s.
- $B_{t_i} - B_{t_j} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_j)$
- $(B_t)_t$ est à trajectoires p.s. continues.

$$
\begin{array}{cccc}
X \;: & T \times \Omega & \longrightarrow & E \\
 & (t, \omega) & \longmapsto & X(t, \omega)
\end{array}
$$



Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



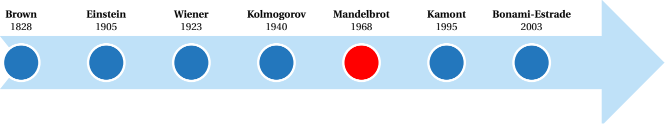
Construction du mouvement brownien

Isométrie $\mathbf{W} : (L^2, \langle f, g \rangle_{L^2}) \to (\mathcal{G}, \mathbb{E}[XY])$

- $\mathbb{E}[\mathbf{W}(f)\mathbf{W}(g)] = \langle f, g \rangle_{L^2}, \quad \mathbf{W}(f) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{L^2}^2)$
- $\forall t \in [0,1], \quad B_t \overset{\text{def}}{=} \mathbf{W}(\mathbb{1}_{[0,t]})$
    - $\mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2\right] = \|\mathbb{1}_{[0,t]} - \mathbb{1}_{[0,s]}\|_{L^2}^2 = \int \mathbb{1}_{[s,t]} = t - s$
    - $\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_i - 1})(B_{t_j} - B_{t_j - 1})\right] = \langle \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}, \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j]} \rangle_{L^2} = 0$

$$\text{intégrale de Wiener} = \int f(x)\mathbf{W}(\mathrm{d}x)$$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes

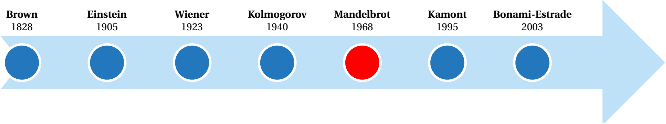


Autosimilarité

$\{X(t)\}_{t\in T}$ est dit autosimilaire de paramètre H si $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{X(\lambda t)\}_{t\in T} \overset{(fdd)}{=} \lambda^H \{X(t)\}_{t\in T}$$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes

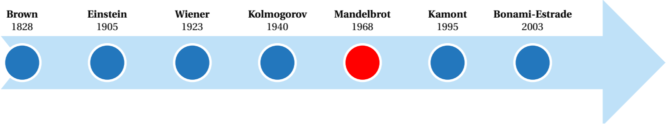


Autosimilarité

$\{X(t)\}_{t \in T}$ est dit autosimilaire de paramètre H si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\{X(\lambda t)\}_{t \in T} \overset{(fdd)}{=} \lambda^H \{X(t)\}_{t \in T}$$

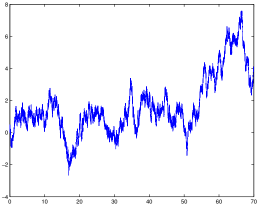
Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



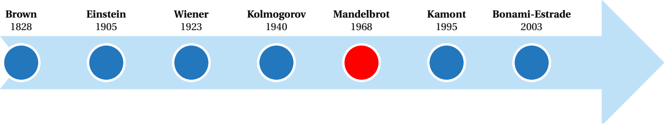
Autosimilarité

$\{X(t)\}_{t\in T}$ est dit autosimilaire de paramètre H si $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{X(\lambda t)\}_{t\in T} \overset{(fdd)}{=} \lambda^H \{X(t)\}_{t\in T}$$

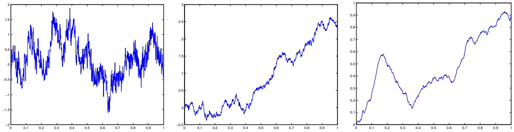


Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



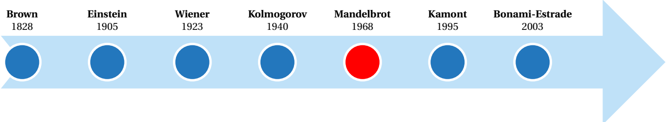
- $\mathbb{E}\left[(B^H(t) - B^H(s))^2\right] = |t-s|^{2H} \Rightarrow$ ~~accr. indépendants~~

Mouvement brownien fractionnaire B^H



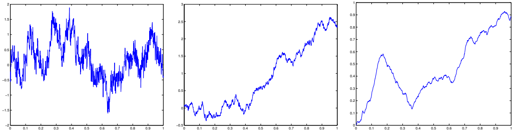
$H = 0.2$ $\quad$ $H = 0.5$ $\quad$ $H = 0.8$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



- $\mathbb{E}\left[\left(B^H(t) - B^H(s)\right)^2\right] = |t-s|^{2H} \Rightarrow$ accr. stationnaires

Mouvement brownien fractionnaire B^H (FBM)



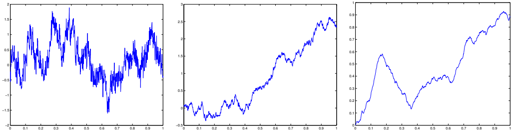
$H = 0.2$ $H = 0.5$ $H = 0.8$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes

Brown 1828 — **Einstein** 1905 — **Wiener** 1923 — **Kolmogorov** 1940 — **Mandelbrot** 1968 — **Kamont** 1995 — **Bonami-Estrade** 2003

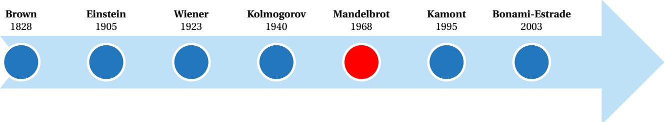
- $\mathbb{E}\left[(B^H(t) - B^H(s))^2\right] = |t-s|^{2H} \Rightarrow$ accr. stationnaires
- $\mathbf{R}(t,s) = \mathrm{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$

Mouvement brownien fractionnaire B^H (FBM)



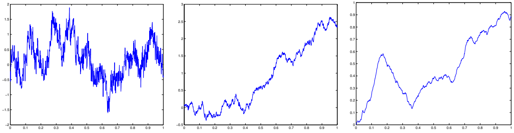
$H = 0.2$ $H = 0.5$ $H = 0.8$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes



- $\mathbb{E}\left[(B^H(t)-B^H(s))^2\right] = |t-s|^{2H} \Rightarrow$ accr. stationnaires
- $\mathbf{R}(t,s) = \mathrm{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$
- $B^H(t) = \frac{1}{c_H} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\xi} - 1}{|\xi|^{H+1/2}} \widehat{\mathbf{W}}(\xi) \Rightarrow$ représentation spectrale

Mouvement brownien fractionnaire B^H (FBM)



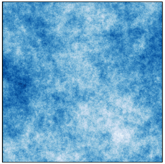
$H = 0.2$ $H = 0.5$ $H = 0.8$

Du brownien aux champs aléatoires anisotropes

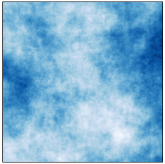
Brown 1828 — **Einstein** 1905 — **Wiener** 1923 — **Kolmogorov** 1940 — **Mandelbrot** 1968 — **Kamont** 1995 — **Bonami-Estrade** 2003

- $\mathbb{E}\left[(B^H(\boldsymbol{x}) - B^H(\boldsymbol{y}))^2\right] = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{2H}, \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$
- $\mathbf{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{x}\|^{2H} + \|\boldsymbol{y}\|^{2H} - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{2H}\right)$
- $B^H(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C_H}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle}-1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$

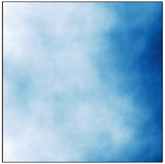
Champ brownien fractionnaire B^H (FBF)



$H = 0.2$

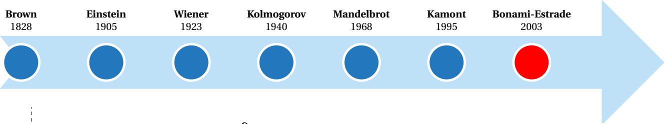


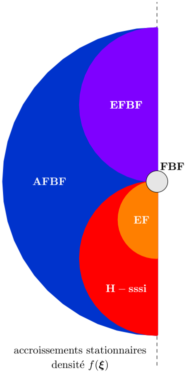
$H = 0.5$



$H = 0.8$

Modèle de Bonami-Estrade

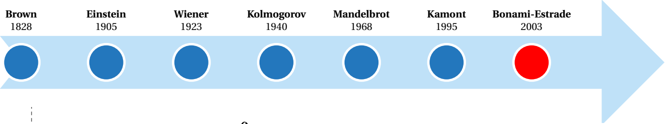


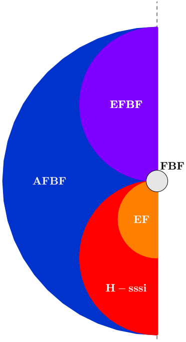


$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)

Modèle de Bonami-Estrade



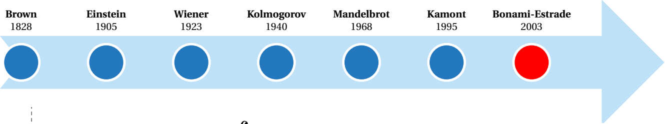


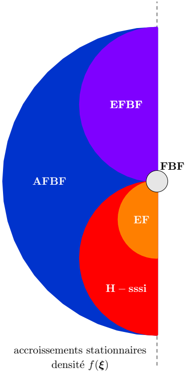
accroissements stationnaires
densité $f(\boldsymbol{\xi})$

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{\xi})+1}}$ (EFBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)

Modèle de Bonami-Estrade

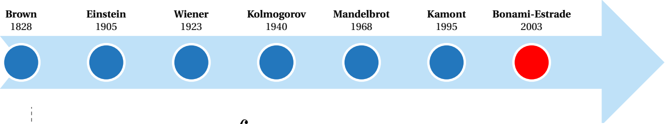


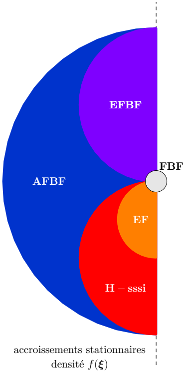


$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) \, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{\xi})+1}}$ (EFBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (H-sssi) (Benassi et coll., 1997)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (FBF)

Modèle de Bonami-Estrade

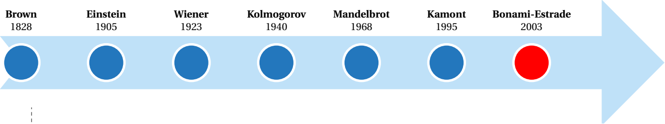


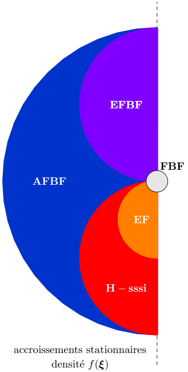


$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle x, \xi \rangle} - 1) f^{1/2}(\xi)\, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\xi)$$

- $f^{1/2}(\xi) = \dfrac{C}{\|\xi\|^{h(\xi)+1}}$ (EFBF)
- $f^{1/2}(\xi) = \dfrac{C(\xi)}{\|\xi\|^{H+1}}$ (H-sssi) (Benassi et coll., 1997)
- $f^{1/2}(\xi) = \dfrac{C(\xi)}{\|\xi\|^{h(\xi)+1}}$ (AFBF)

Modèle de Bonami-Estrade



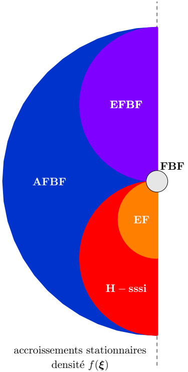


$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} - 1\right) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

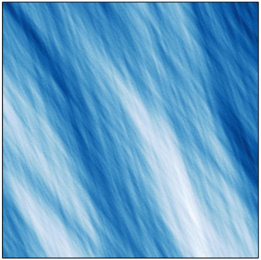
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{\xi})+1}}$ (EFBF)
- $f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \dfrac{C(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$ (H-sssi) (Benassi et coll., 1997)
  - $C(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)$ (EF)

Modèle de Bonami-Estrade

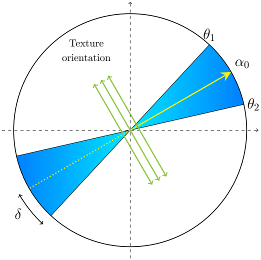
$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} - 1\right) \frac{\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$



Champ élémentaire (EF) $[H = 0.5,\ \alpha_0 = \pi/6]$



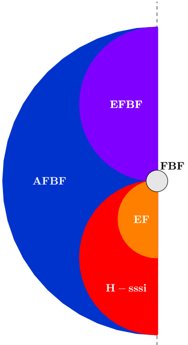
$\delta = 3.10^{-1}$



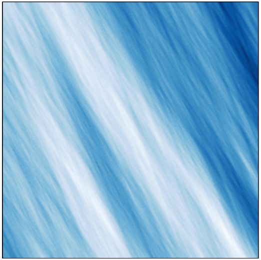
$\delta = 3.10^{-1}$

Modèle de Bonami-Estrade

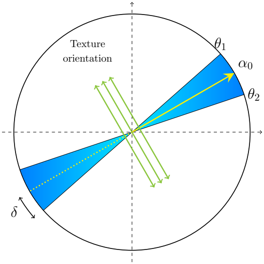
$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} - 1\right) \frac{\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$



Champ élémentaire (EF) $[H = 0.5,\ \alpha_0 = \pi/6]$



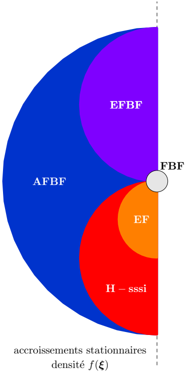
$\delta = 3.10^{-1}$



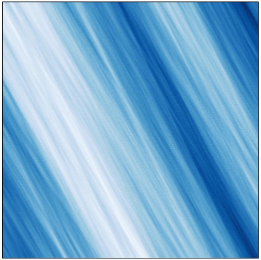
$\delta = 3.10^{-1}$

Modèle de Bonami-Estrade

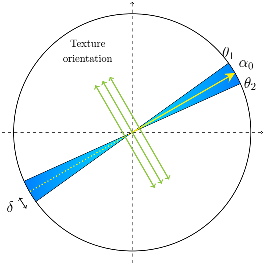
$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} - 1\right) \frac{\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$



Champ élémentaire (EF) $[H = 0.5,\ \alpha_0 = \pi/6]$



$\delta = 3.10^{-1}$



$\delta = 3.10^{-1}$

État de l'art des champs anisotropes

- Drap brownien fractionnaire (FBS) (Kamont, 1995), (Léger et Pontier, 1999), (Ayache et coll., 2002)
- Champs H-sssi (Benassi et coll., 1997)
- Modèle de Bonami et Estrade (Bonami et Estrade, 2003)
- Champs gaussiens à autosimilarité matricielle (OSGRF) (Schertzer et Lovejoy, 1985), (Biermé et coll., 2007)
- Modèles de Xue, Xiao, Li (Xue et Xiao, 2011), (Li et Xiao, 2011)
- ...

État de l'art des champs anisotropes

- Drap brownien fractionnaire (FBS) (Kamont, 1995), (Léger et Pontier, 1999), (Ayache et coll., 2002)
- Champs H-sssi (Benassi et coll., 1997)
- Modèle de Bonami et Estrade (Bonami et Estrade, 2003)
- Champs gaussiens à autosimilarité matricielle (OSGRF) (Schertzer et Lovejoy, 1985), (Biermé et coll., 2007)
- Modèles de Xue, Xiao, Li (Xue et Xiao, 2011), (Li et Xiao, 2011)
- ...

$\Rightarrow$ aucune classe de champs à anisotropie locale contrôlée

État de l'art des champs anisotropes

- Drap brownien fractionnaire (FBS) (Kamont, 1995), (Léger et Pontier, 1999), (Ayache et coll., 2002)
- Champs H-sssi (Benassi et coll., 1997)
- Modèle de Bonami et Estrade (Bonami et Estrade, 2003)
- Champs gaussiens à autosimilarité matricielle (OSGRF) (Schertzer et Lovejoy, 1985), (Biermé et coll., 2007)
- Modèles de Xue, Xiao, Li (Xue et Xiao, 2011), (Li et Xiao, 2011)
- ...

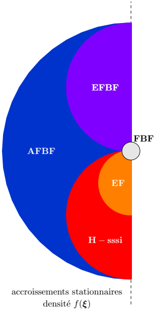
$\Rightarrow$ aucune classe de champs à anisotropie locale contrôlée

$\Rightarrow$ contribution : deux nouvelles classes de ce type
le (GAFBF) et le (WAFBF)

Des champs H-sssi aux GAFBF

- Modèle de Bonami-Estrade :

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\, \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$



H-sssi

$$f^{1/2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{C(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}}$$

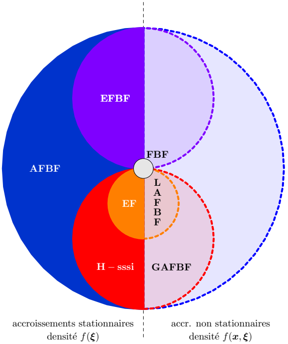
EF

$$C(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi} - \alpha_0)$$

Modèle à orientation et régularité locales prescrites

- Notre modèle :

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1\right) f^{1/2}(\boldsymbol{x}, \xi) \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$



GAFBF

$$f^{1/2}(\boldsymbol{x}, \xi) = \frac{C(\boldsymbol{x}, \xi)}{\|\xi\|^{h(\boldsymbol{x})+1}}$$

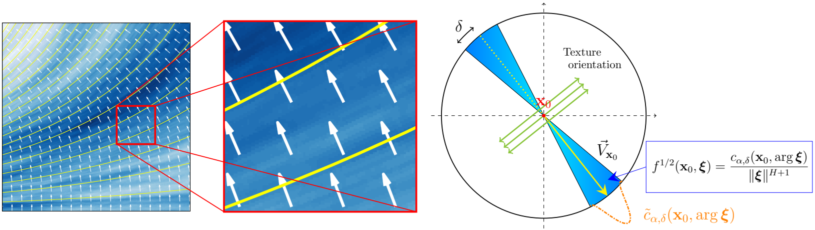
LAFBF

$$C(\boldsymbol{x}, \xi) = \mathbb{1}_{[-\delta(\boldsymbol{x}), \delta(\boldsymbol{x})]}(\arg \xi - \alpha(\boldsymbol{x}))$$

Modèle à orientation locale prescrite

$$B^H_{\alpha,\delta}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} - 1\right) \frac{\mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg\boldsymbol{\xi} - \alpha(\boldsymbol{x}))}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

Champ élémentaire localisé (LAFBF) $[H = 0.8,\ \alpha(x_1, x_2) = -\pi/2 + x_1]$



(a) (b) (c)

Le champ tangent : outil d'analyse et de synthèse

1. Outil d'analyse (Lévy-Vehel, 1995), (Falconer, 2002) :

$$\left\{\lim_{\rho\to 0}\frac{X(\boldsymbol{x_0}+\rho\boldsymbol{x})-X(\boldsymbol{x_0})}{\rho^{h(\boldsymbol{x}_0)}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}\overset{d}{=}\{Y_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}$$

2. Outil de synthèse (Lévy-Véhel, 1995), (Benassi, 1997) :

$$X(\boldsymbol{x}_0)\leftarrow Y_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0)$$

Champ brownien multifractionnaire B^h (MBF) (Peltier, Vehel, 1995)

- Analyse : le MBF se comporte localement comme un FBF

$$\left\{\lim_{\rho\to 0}\frac{B^h(\boldsymbol{x_0}+\rho\boldsymbol{x})-B^h(\boldsymbol{x_0})}{\rho^{h(\boldsymbol{x}_0)}}\right\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}\overset{d}{=}\{B^{h(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{x})\}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}$$

- Synthèse : $B^h(\boldsymbol{x}_0)\leftarrow B^{h(\boldsymbol{x}_0)}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0)$

Le champ tangent : outil d'analyse et de synthèse

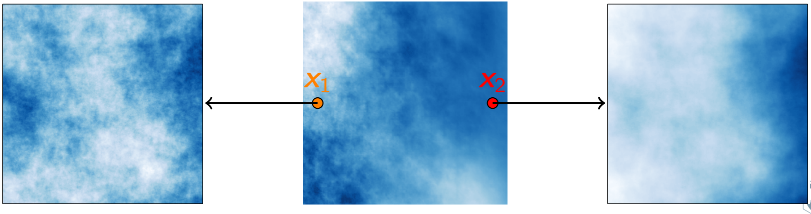
1. Outil d'analyse (Lévy-Vehel, 1995), (Falconer, 2002) :

$$\left\{\lim_{\rho\to 0} \frac{X(\mathbf{x_0}+\rho\mathbf{x}) - X(\mathbf{x_0})}{\rho^{h(\mathbf{x}_0)}}\right\}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \overset{d}{=} \{Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2}$$

2. Outil de synthèse (Lévy-Véhel, 1995), (Benassi, 1997) :

$$X(\mathbf{x}_0) \leftarrow Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}=\mathbf{x}_0)$$

FBF B^H, $H \equiv h(\mathbf{x}_1)$ MBF $B^h(\mathbf{x})$ FBF B^H, $H \equiv h(\mathbf{x}_2)$



Le champ tangent : outil d'analyse et de synthèse

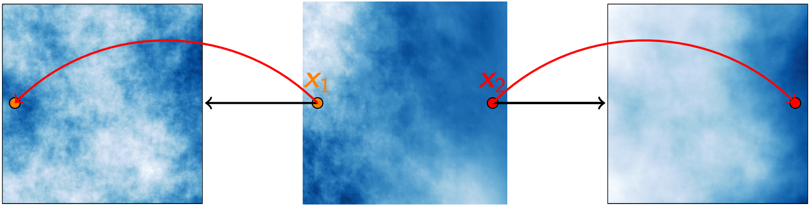
1. Outil d'analyse (Lévy-Vehel, 1995), (Falconer, 2002) :

$$\left\{ \lim_{\rho \to 0} \frac{X(\mathbf{x_0} + \rho \mathbf{x}) - X(\mathbf{x_0})}{\rho^{h(\mathbf{x}_0)}} \right\}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \stackrel{d}{=} \{ Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}$$

2. Outil de synthèse (Lévy-Véhel, 1995), (Benassi, 1997) :

$$X(\mathbf{x}_0) \leftarrow Y_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0)$$

B^H, $H \equiv h(\mathbf{x}_1)$ | MBM $B^{h(\mathbf{x})}$ | B^H, $H \equiv h(\mathbf{x}_2)$



Hypothèses du GAFBF

Hypothèses $(\mathcal{H})$

- h est β–höldérienne, telle que $a = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x}) > 0$, $b = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x})$ et $b < \beta \leq 1$.
- $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est bornée $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leqslant M, \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$.
- $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est paire $C(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\xi}) = C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$.
- $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ homogène $C(\boldsymbol{x},\rho\boldsymbol{\xi}) = C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \forall\rho$.
- $\boldsymbol{x} \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est continue et $\exists\eta$, $\beta \leq \eta \leq 1$, t.q $\forall \boldsymbol{x}$

$$\sup_{\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{0},1)} \|\boldsymbol{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} \left[C(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Theta}) - C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Theta})\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta} \leq A_{\boldsymbol{x}} < \infty$$

Champ tangent du GAFBF

Soit X le GAFBF défini par

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1\right) \frac{C(\boldsymbol{x}, \xi)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

Théorème (Polisano et coll., 2017)

Si X vérifie les hypothèses $(\mathcal{H})$, alors X admet en tout point $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^2$ un champ tangent $Y_{\boldsymbol{x_0}}$ donné par la représentation :

$$\begin{aligned} Y_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{x_0}, \xi) \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}) \ , \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C(\boldsymbol{x_0}, \xi)}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x_0})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}) \ . \end{aligned}$$

Champ tangent du GAFBF

Soit X le GAFBF défini par

$$X(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1\right) \frac{C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

Théorème (Polisano et coll., 2017)

Si X vérifie les hypothèses $(\mathcal{H})$, alors X admet en tout point $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^2$ un champ tangent $Y_{\boldsymbol{x_0}}$ donné par la représentation :

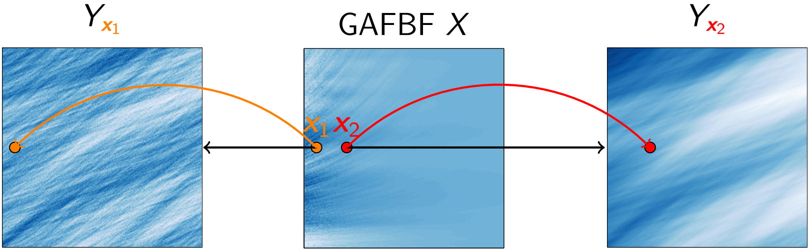
$$Y_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) f^{1/2}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\xi}) \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}) \ ,$$

$$\text{champ H-sssi} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x_0})+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}) \ .$$

Synthèse du GAFBF par champ tangent

$$X(\boldsymbol{x}_0) \leftarrow Y_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} - 1) \frac{C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{h(\boldsymbol{x}_0)+1}} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

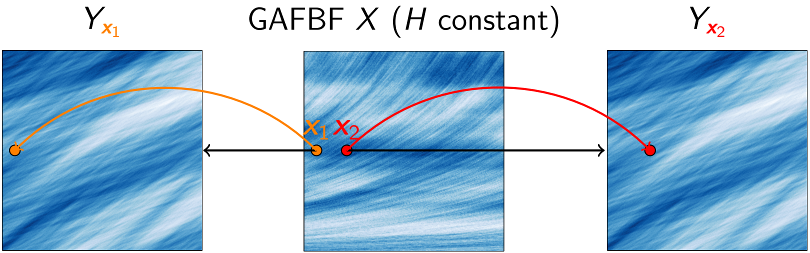
$\Rightarrow$ Nécessite de simuler autant de champs tangents qu'il y a de pixels dans l'image !



Synthèse du GAFBF inspirée de (Wood, 1994)

1. Simuler U GAFBF X^{H_u} à régularité constante $(H_u)_{1\leq u\leq U}$:

$$X^{H_u}(\boldsymbol{x}_0) \leftarrow Y_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}-1)\frac{C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{H_u+1}}\widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

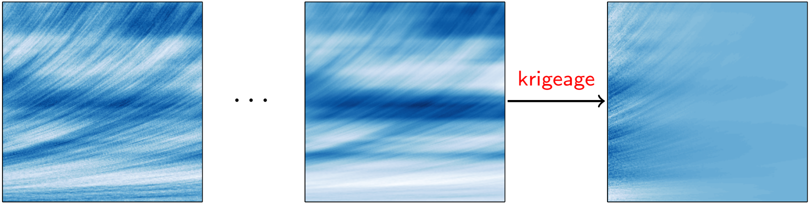


Synthèse du GAFBF inspirée de (Wood, 1994)

2. Simuler le GAFBF à régularité variable par krigeage :

Interpolation spatiale des (X^{H_u}) à partir de la covariance

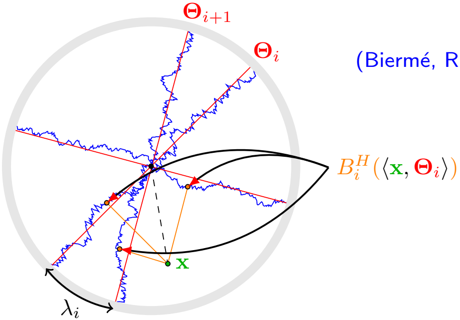
GAFBF X^{H_1} $\quad\cdots\quad$ GAFBF X^{H_U} $\quad$ GAFBF X



Synthèse du champ tangent (bandes tournantes)

$$Y_{\boldsymbol{x}_0}^{[n]}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\boldsymbol{x}_0) B_i^H\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Theta}_i \rangle\right) ,$$

$$\omega_i(\boldsymbol{x}_0)^2 = \lambda_i \gamma(h(\boldsymbol{x}_0)) C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}_i)$$



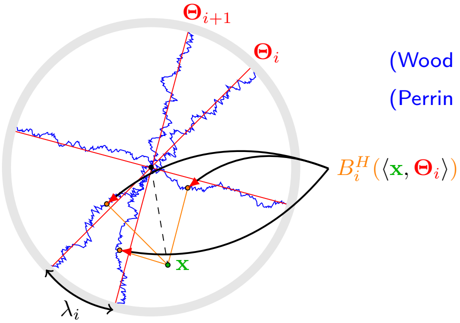
(Matheron, 1973)

(Biermé, Richard, Moisan, 2015)

Synthèse du champ tangent (bandes tournantes)

$$Y_{\boldsymbol{x}_0}^{[n]}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\boldsymbol{x}_0) B_i^H(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Theta}_i \rangle) \ ,$$

$\Rightarrow$ Simuler n FBM B_i^H de complexité $O(\ell \log \ell)$



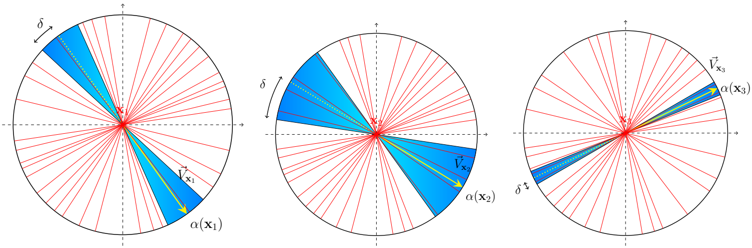
(Wood et coll., 1994)

(Perrin et coll., 2002)

Simulation du LAFBF à H constant

$$B^H_{\alpha,\delta}(\boldsymbol{x}_0) \leftarrow Y^{[n]}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\boldsymbol{x}_0) B^H_i(\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\Theta}_i \rangle) \;,$$

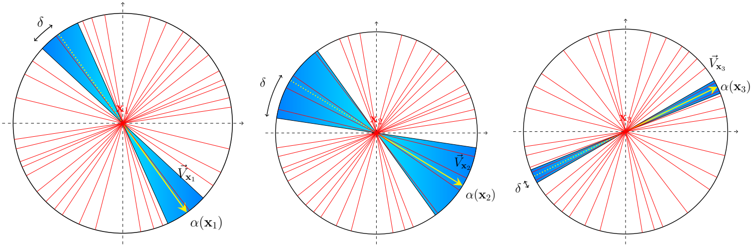
$$\omega_i(\boldsymbol{x}_0)^2 \propto C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}_i) = \mathbb{1}_{[-\delta(\boldsymbol{x}_0),\delta(\boldsymbol{x}_0)]}(\arg \boldsymbol{\Theta}_i - \alpha(\boldsymbol{x}_0))$$



Simulation du LAFBF à H constant

$$B^H_{\alpha,\delta}(\boldsymbol{x}_0) \leftarrow Y^{[n]}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\boldsymbol{x}_0) B_i^H \left(\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\Theta}_i \rangle\right) \ ,$$

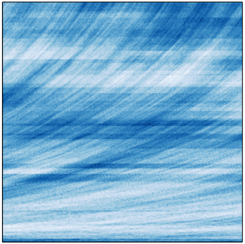
- Pré-calcul des n B_i^H (complexité $O(\ell \log \ell)$)
- Le reste de l'algorithme s'effectue en $O(\log n \times \#\text{pixels})$



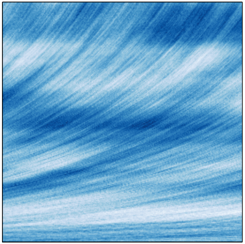
Simulation du LAFBF à H constant

$$B^H_{\alpha,\delta} \leftarrow Y^{[n]}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\boldsymbol{x}_0) B^H_i(\langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\Theta}_i \rangle) \ ,$$

$$\omega_i(\boldsymbol{x}_0)^2 \propto C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}_i) = \mathbb{1}_{[-\delta(\boldsymbol{x}_0),\delta(\boldsymbol{x}_0)]}(\arg \boldsymbol{\Theta}_i - \alpha(\boldsymbol{x}_0))$$



$C_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}_i)$

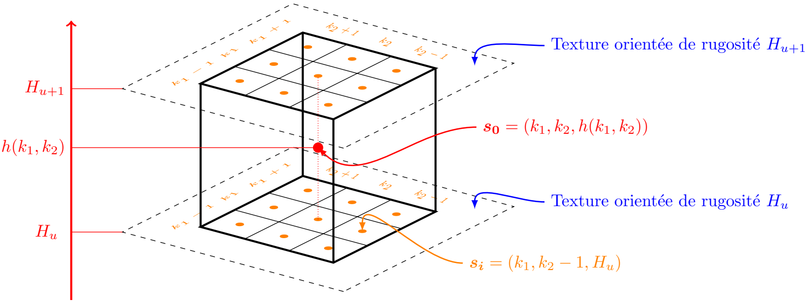


$\widetilde{C}_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{\Theta}_i)$ régularisée

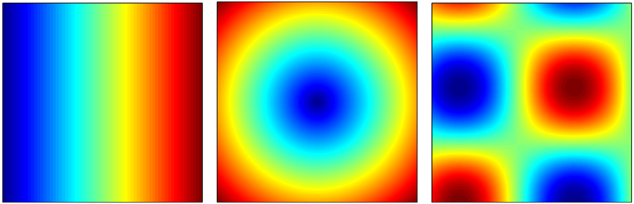
Simulation du LAFBF à h variable (krigeage)

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{s_0}) = \sum_{i \in \mathcal{V}(\boldsymbol{s_0})} \lambda_i Z(\boldsymbol{s_i}) = \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \boldsymbol{Z} \quad (\text{BLUE})$$

$$\boldsymbol{Z} = B^h_{\alpha,\delta},\ (B^{H_u}_{\alpha,\delta})_{1 \le u \le U} \to Z(\boldsymbol{s_i}),\ \boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathrm{Cov}(Z(\boldsymbol{s_i}), Z(\boldsymbol{s_j})) \to \boldsymbol{\lambda}$$

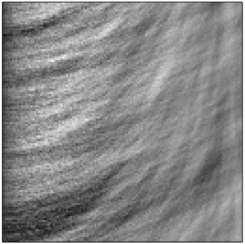


Simulation du LAFBF à h variable (krigeage)



h linéaire h radiale h sinusoïdale

Simulation du LAFBF à h variable



- Variation linéaire des orientations $\alpha(\boldsymbol{x})$ selon (Ox)
- Variation linéaire de la directionnalité $\delta(\boldsymbol{x})$ selon (Ox)
- Variation linéaire de la régularité $h(\boldsymbol{x})$ selon (Ox)

Le WAFBF : champs H-sssi déformés

Définition (WAFBF)

Soit X un champ H-sssi et $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction continûment différentiable. Le WAFBF $Z_{\mathbf{\Phi},X}$ est défini comme la déformation du champ X par $\mathbf{\Phi}$:

$$Z_{\mathbf{\Phi},X}(\boldsymbol{x}) = X(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) \ .$$

Références sur les déformations de champs aléatoires stationnaires :

- (Perrin et Senoussi, 1999, 2000)
- (Guyon et Perrin, 2000)

Le WAFBF : champs H-sssi déformés

Définition (WAFBF)

Soit X un champ H-sssi et $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction continûment différentiable. Le WAFBF $Z_{\mathbf{\Phi},X}$ est défini comme la déformation du champ X par $\mathbf{\Phi}$:

$$Z_{\mathbf{\Phi},X}(\boldsymbol{x}) = X(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) \, .$$

Théorème (Champ tangent d'un WAFBF)

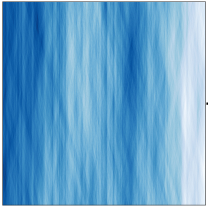
$Z_{\mathbf{\Phi},X}$ admet en tout point $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^2$ un champ tangent :

$$Y_{\boldsymbol{x_0}}(\boldsymbol{x}) = X(\mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x_0})\ \boldsymbol{x}) \, , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \, ,$$

où $\mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x_0})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{\Phi}$ au point $\boldsymbol{x_0}$.

Champ élémentaire déformé

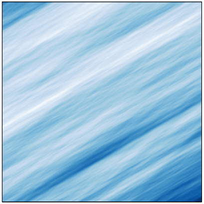
$$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$$



X

$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(\mathbf{x})}\mathbf{x}]{\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}$$

WAFBF

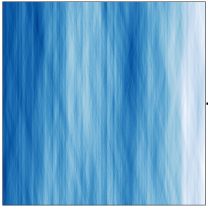


$Z = X \circ \mathbf{\Phi}$

$$\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{4}$$

Champ élémentaire déformé

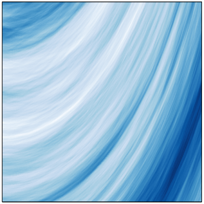
$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$



X

$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}]{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}$$

WAFBF

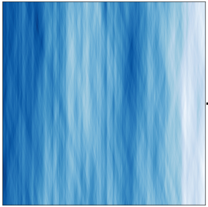


$Z = X \circ \boldsymbol{\Phi}$

$$\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$$

Champ élémentaire déformé

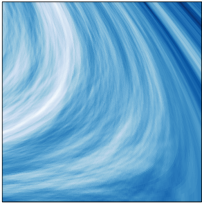
$$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$$



X

$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}]{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}$$

WAFBF



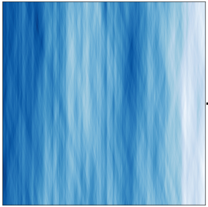
$Z = X \circ \boldsymbol{\Phi}$

$$\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$$

Champ élémentaire déformé

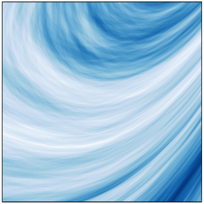
$$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$$

WAFBF



X

$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(x)}x]{\mathbf{\Phi}(x)}$$



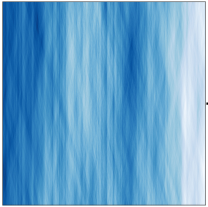
$Z = X \circ \mathbf{\Phi}$

$$\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$$

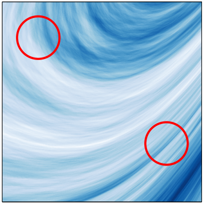
Champ élémentaire déformé

$$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$$

WAFBF



$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}]{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}$$



X

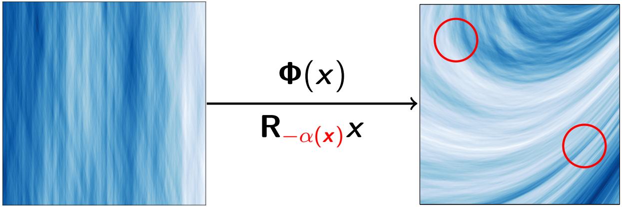
$Z = X \circ \boldsymbol{\Phi}$

1. La directionnalité n'est pas contrôlée

Champ élémentaire déformé

$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$

WAFBF

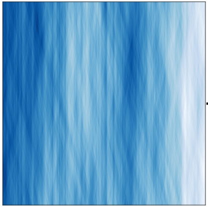


X $\qquad$ $Z = X \circ \mathbf{\Phi}$

1. La directionnalité n'est pas contrôlée
2. Quelle transformation $\mathbf{\Phi}$ permet de prescrire en tout point les orientations $\alpha(\boldsymbol{x})$?

Champ élémentaire déformé

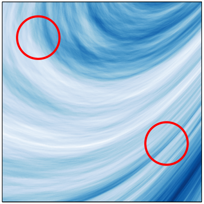
$C(\xi) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \xi)$



X

$$\xrightarrow[\mathbf{R}_{-\alpha(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}]{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})}$$

WAFBF



$Z = X \circ \boldsymbol{\Phi}$

1. La directionnalité n'est pas contrôlée
2. Quelle transformation $\boldsymbol{\Phi}$ permet de prescrire en tout point les orientations $\alpha(\boldsymbol{x})$?
3. Quelle définition pour l'orientation d'un champ aléatoire ?

Plan de l'exposé

Orientation locale d'une fonction déterministe

Transformée de Riesz et signal monogène (Felsberg, 2001)

L'opérateur de Riesz $\boldsymbol{\mathcal{R}} : f \mapsto (\mathcal{R}_1 f, \mathcal{R}_2 f)$ est défini par :

$$\widehat{\mathcal{R}_1 f}(\boldsymbol{\omega}) = -\mathrm{j}\frac{\omega_1}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}), \quad \widehat{\mathcal{R}_2 f}(\boldsymbol{\omega}) = -\mathrm{j}\frac{\omega_2}{\|\boldsymbol{\omega}\|}\widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$$

$\Rightarrow$ Orientation : $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{R}}f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\mathcal{R}}f(\boldsymbol{x})\|}$, $\theta(\boldsymbol{x}) = \arctan\left(\dfrac{\mathcal{R}_2 f(\boldsymbol{x})}{\mathcal{R}_1 f(\boldsymbol{x})}\right)$

$\Rightarrow$ (Plus robuste) minimiser les écarts de direction à $\boldsymbol{\mathcal{R}}f$:

$$\max_{\theta'} \int_{\mathbb{R}^2} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \left\langle \boldsymbol{n}(\theta'), \boldsymbol{\mathcal{R}}f(\boldsymbol{x}')\right\rangle^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \max_{\theta'} \boldsymbol{n}(\theta')^{\mathsf{T}} \mathbf{J}_f^W(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\theta')$$

$$[\mathbf{J}_f^W(\boldsymbol{x})]_{pq} = \int_{\mathbb{R}^2} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathcal{R}_p f(\boldsymbol{x}')\mathcal{R}_q f(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}', \quad p, q \in \{1, 2\}$$

Orientation locale d'une fonction déterministe

Coefficients d'ondelettes monogènes (Unser, Olhede, 2009)

Soit $\psi_{i,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = 2^i \psi(2^i \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})$ une trame d'ondelettes à partir d'une ondelette réelle isotrope $\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \varphi(\|\boldsymbol{\xi}\|)$. On considère les coefficients d'ondelettes de $\boldsymbol{\mathcal{R}} f$ dans la trame $\{\psi_{i,\boldsymbol{k}}\}$:

$$c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(f) = \begin{pmatrix} c_{i,\boldsymbol{k}}^{(1)}(f) \\ c_{i,\boldsymbol{k}}^{(2)}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{R}_1 f, \psi_{i,\boldsymbol{k}} \rangle \\ \langle \mathcal{R}_2 f, \psi_{i,\boldsymbol{k}} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \mathcal{R}_1 \psi_{i,\boldsymbol{k}} \rangle \\ \langle f, \mathcal{R}_2 \psi_{i,\boldsymbol{k}} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{f,i}^{W}[\boldsymbol{k}] = c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(f) c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(f)^* = \begin{pmatrix} \underline{|c_{i,\boldsymbol{k}}^{(1)}(f)|^2} & c_{i,\boldsymbol{k}}^{(1)}(f) \cdot \overline{c_{i,\boldsymbol{k}}^{(2)}(f)} \\ c_{i,\boldsymbol{k}}^{(1)}(f) \cdot c_{i,\boldsymbol{k}}^{(2)}(f) & |c_{i,\boldsymbol{k}}^{(1)}(f)|^2 \end{pmatrix}$$

Orientation pour un champ H-sssi

Coefficients d'ondelettes monogènes d'un champ H-sssi X

$$c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\ell)}(X) = \langle X, \mathcal{R}_\ell \psi_{i,\boldsymbol{k}} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{R}_\ell \psi_{i,\boldsymbol{k}}}(\boldsymbol{\xi}) C(\boldsymbol{\xi}) \|\boldsymbol{\xi}\|^{-H-1} \widehat{\mathbf{W}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\xi})$$

Théorème (Polisano et coll., 2017)

Soit $\boldsymbol{\Sigma}(c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(X)) = \mathbb{E}[c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(X) c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(X)^*]$, alors :

$$\boldsymbol{\Sigma}(c_{i,\boldsymbol{k}}^{(\mathcal{R})}(X)) = 2^{-2i(H+1)} \left[\int_0^{+\infty} \frac{|\varphi(r)|^2}{r^{2H+1}} \, \mathrm{d}r \right] \mathbf{J}_X \; ,$$

où $\mathbf{J}_X$ est appelée tenseur de structure de X défini par :

$$[\mathbf{J}_X]_{pq} = \int_{\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{S}^1} \Theta_p \Theta_q \; C(\boldsymbol{\Theta})^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}, \quad p, q \in \{1, 2\} \; .$$

Orientation pour un champ H-sssi

Définition (Orientation et indice de cohérence du H-sssi X)

- L'orientation $\vec{\boldsymbol{n}}_X$ de X est le vecteur propre unitaire associé à la plus grande des valeurs propres λ_1, λ_2 de $\mathbf{J}_X$
- L'indice de cohérence de X est défini par

$$\chi = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Calcul d'orientation de champs dérivés d'un EF

- $X = X_{\alpha_0,\delta}$ avec $C(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\Theta} - \alpha_0)$ (EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_X = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(\alpha_0), \quad \chi = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}$$

Calcul d'orientation de champs dérivés d'un EF

- $X = X_{\alpha_0,\delta}$ avec $C(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\Theta} - \alpha_0)$ (EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_X = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(\alpha_0), \quad \chi = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}$$

- $X = X_{\alpha_0,\delta} + X_{\alpha_1,\delta}$ (somme de 2 EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_X = \boldsymbol{u}\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right), \quad \chi = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_0 - \alpha_1)$$

Calcul d'orientation de champs dérivés d'un EF

- $X = X_{\alpha_0,\delta}$ avec $C(\mathbf{\Theta}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \mathbf{\Theta} - \alpha_0)$ (EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_X = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(\alpha_0), \quad \chi = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta}$$

- $X = X_{\alpha_0,\delta} + X_{\alpha_1,\delta}$ (somme de 2 EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_X = \boldsymbol{u}\left(\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right), \quad \chi = \frac{\sin(2\delta)}{2\delta} \cos(\alpha_0 - \alpha_1)$$

- $X_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{x}) = X_{\alpha_0,\delta}(\mathbf{L}\boldsymbol{x})$ (déformation linéaire d'un EF)

$$\vec{\boldsymbol{n}}_{X_{\mathbf{L}}} = \frac{\mathbf{L}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{u}(\alpha_0)}{\|\mathbf{L}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{u}(\alpha_0)\|}$$

Orientation d'un champ gaussien localisable

Champ gaussien localisable

Un champ aléatoire $X = \{X(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\}$ est dit localisable, si il admet un champ tangent en tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

Références : (Lévy-Véhel, 1995), (Benassi et coll., 1997), (Falconer, 2002).

Définition (Orientation locale d'un champ gaussien localisable)

L' orientation locale $\vec{\boldsymbol{n}}_X(\boldsymbol{x}_0)$ du champ gaussien localisable X au point $\boldsymbol{x_0}$ est l'orientation de son champ tangent $Y_{\boldsymbol{x_0}}$ H-sssi :

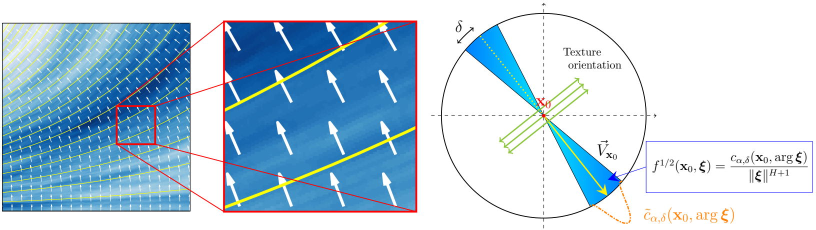
$$\vec{\boldsymbol{n}}_X(\boldsymbol{x}_0) \equiv \vec{\boldsymbol{n}}_{Y_{\boldsymbol{x}_0}}$$

Orientation d'un champ gaussien localisable

Orientation locale du LAFBF X

L'orientation locale $\vec{n}_X(\mathbf{x}_0)$ et l'indice de cohérence $\chi(\mathbf{x}_0)$ de X en $\mathbf{x}_0$ sont ceux du champ élémentaire $X_{\alpha(\mathbf{x}_0),\delta(\mathbf{x}_0)}$:

$$\vec{n}_X(\mathbf{x}_0) \equiv \vec{n}_{X_{\alpha_0(\mathbf{x}_0),\delta(\mathbf{x}_0)}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(\mathbf{x}_0) \\ \sin\alpha(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}, \quad \chi(\mathbf{x}_0) = \frac{\sin(2\delta(\mathbf{x}_0))}{2\delta(\mathbf{x}_0)}$$



(a) (b) (c)

Orientation d'un champ gaussien localisable

Orientation locale du WAFBF où $X = X_{\alpha_0,\delta}$ est un EF

Le champ tangent de $Z_{\mathbf{\Phi},X}(\boldsymbol{x}) = X_{\alpha_0,\delta}(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}))$ en $\boldsymbol{x}_0$ est

$$Y_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = X_{\alpha_0,\delta}(\mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x}_0)\ \boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

dont l'orientation est $\vec{\boldsymbol{n}}_{Y_{\boldsymbol{x}_0}} = \frac{\mathbf{L}^\mathsf{T} \boldsymbol{u}(\alpha_0)}{\|\mathbf{L}^\mathsf{T} \boldsymbol{u}(\alpha_0)\|}$ avec $\mathbf{L} = \mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x}_0)$, d'où

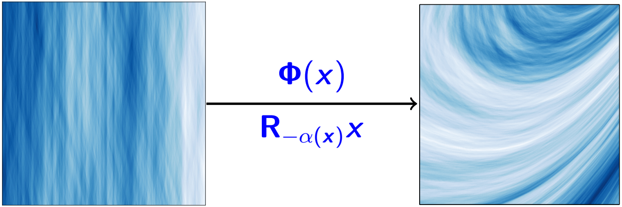
$$\vec{\boldsymbol{n}}_Z(\boldsymbol{x}_0) \equiv \vec{\boldsymbol{n}}_{Y_{\boldsymbol{x}_0}} = \frac{\mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x}_0)^\mathsf{T} \boldsymbol{u}(\alpha_0)}{\|\mathbf{D\Phi}(\boldsymbol{x}_0)^\mathsf{T} \boldsymbol{u}(\alpha_0)\|}$$

Orientation d'un champ gaussien localisable

Exemple (Rotation locale du WAFBF où $X = X_{0,\delta}$)

L'orientation locale de $Z_{\boldsymbol{\Phi},X}(\boldsymbol{x}) = X_{0,\delta}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))$ en $\boldsymbol{x}_0$ avec $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{R}_{-\alpha(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}$ est donnée par $\vec{\boldsymbol{n}}_Z(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}_1}{\|\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}_1\|}$ soit :

$$\vec{\boldsymbol{n}}_Z(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}_0)) + \langle \boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}_0))^{\perp}, \boldsymbol{x}_0\rangle \nabla\alpha(\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}_0)) + \langle \boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}_0))^{\perp}, \boldsymbol{x}_0\rangle \nabla\alpha(\boldsymbol{x}_0)\|}$$



$X_{0,\delta}$ $\qquad$ $Z_{\boldsymbol{\Phi},X} = X_{0,\delta} \circ \boldsymbol{\Phi}$

Orientations prescrites pour un WAFBF

Proposition (Contrôle d'orientation par fonctions harmoniques)

Soit $Z_{\boldsymbol{\Phi}_\alpha, X}(\boldsymbol{x})$ le champ $X = X_{0,\delta}$ d'orientation $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^\mathsf{T}$ déformé par une transformation conforme $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ définie par :

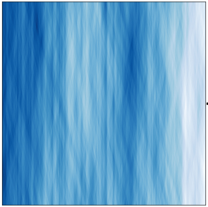
1. $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique,
2. λ sa fonction conjuguée harmonique telle que $\boldsymbol{\Psi}_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\alpha \end{pmatrix}$ est holomorphe,
3. $\boldsymbol{\Phi}_\alpha$ une primitive complexe de $\exp(\boldsymbol{\Psi}_\alpha)$.

L'orientation locale (à δ^2 près) de $Z_{\boldsymbol{\Phi}_\alpha, X}$ en $\boldsymbol{x_0}$ est

$$\vec{\boldsymbol{n}}_Z(\boldsymbol{x_0}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(\boldsymbol{x_0}) \\ \sin\alpha(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}_0))$$

Orientations prescrites pour un WAFBF

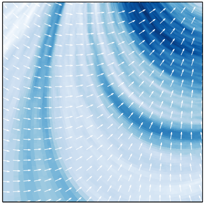
$C(\boldsymbol{\xi}) = \mathbb{1}_{[-\delta,\delta]}(\arg \boldsymbol{\xi})$



$X_{0,\delta}$

$$\xrightarrow[\alpha(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2 + c]{\boldsymbol{\Phi}_\alpha}$$

WAFBF $(a,b) = (2,-1)$



$Z = X_{0,\delta} \circ \boldsymbol{\Phi}_\alpha$

$$\boldsymbol{\Phi}_\alpha(x_1,x_2) = \frac{\exp(ax_2 - bx_1)}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a\sin(ax_1+bx_2+c) - b\cos(ax_1+bx_2+c) \\ a\cos(ax_1+bx_2+c) + b\sin(ax_1+bx_2+c)\end{pmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}_Z(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}_1}{\|\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}_1\|} = \boldsymbol{u}(\alpha(\boldsymbol{x}))$$

Plan de l'exposé

Enhance it !

Enhance it !

Problème inverse

$$y = \mathbf{A}x$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

Problème inverse

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

$\mathbf{y}$

$\mathbf{x}$

Problème inverse

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

Problème inverse

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \epsilon$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

Problème inverse

$$\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \epsilon$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

Problème inverse

Minimisation (attache aux données)

Problème mal posé :

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$$

Exemple (Opérateur de dégradation)

- $\mathbf{A}$ = sous-échantillonnage
- $\mathbf{A}$ = flou
- ...

Problème inverse

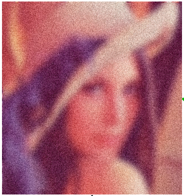
Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)

$\mathbf{y}$



$\uparrow \mathbf{A}$

$\mathbf{x}$

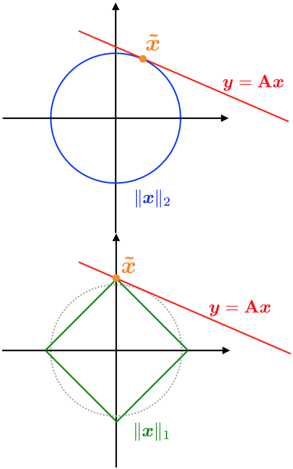
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)



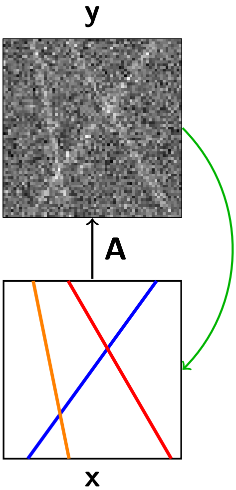
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$ (Tikhonov, 1963)
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$ (Rudin et coll., 1992)
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ (Chandrasekaran, 2010)



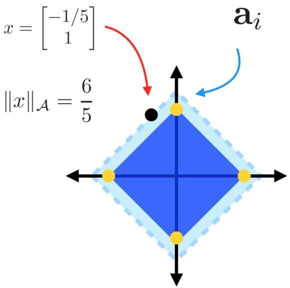
Paradigme de la décomposition atomique

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{K} c_i \mathbf{a}_i, \quad c_i \geq 0, \quad \mathbf{a}_i \in \mathcal{A}$$

Norme atomique

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \inf \{t > 0 : \mathbf{x} \in t\mathrm{conv}(\mathcal{A})\}$$
$$= \inf \left\{ \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} c_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} c_{\mathbf{a}} \mathbf{a} \right\}$$

(Chandrasekaran et coll., 2010)

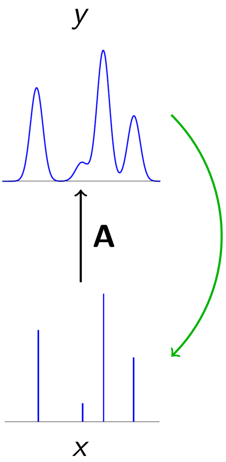


$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}} = \|\mathbf{x}\|_1$$

Application : super-résolution d'impulsions 1-D

$$x = \sum_{i=1}^{K} c_i \delta_{t_i}, \quad c_i \geq 0, \quad t_i \geq 0$$



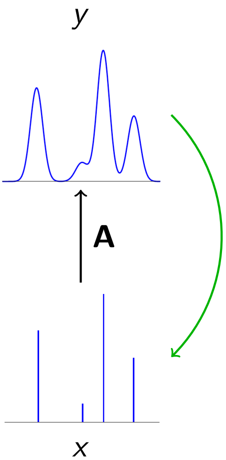
Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_x \frac{1}{2} \|y - \mathbf{A}x\|^2 + \lambda \|x\|_{\mathrm{TV}}$$

Référence : (Candès et Fernandez-Granda, 2012)

Application : super-résolution d'impulsions 1-D

$$\mathcal{F}x = \sum_{i=1}^{K} c_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_i \omega}, \quad c_i \geq 0, \quad t_i \geq 0$$



Minimisation (régularisation convexe)

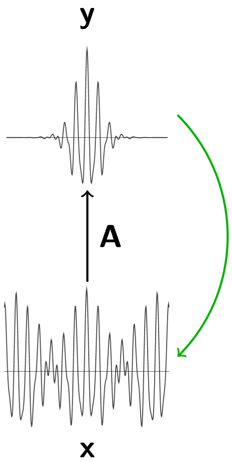
$$\arg\min_x \frac{1}{2} \|y - \mathbf{A}x\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$$

Référence : (Tang, Bhaskar, Recht et coll., 2013)

Application : super-résolution d'impulsions 1-D

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{K} c_i \mathbf{a}(f_i), \quad c_i \geq 0, \quad \mathbf{a}(f_i) \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \boldsymbol{a}(f) \in \mathbb{C}^N \right\}, \quad [\boldsymbol{a}(f)]_n = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f n}$$



Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$$

Référence : (Tang, Bhaskar, Recht et coll., 2013)

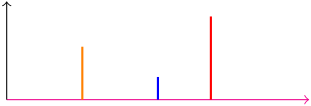
Problème inverse

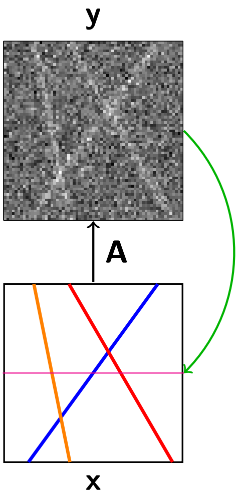
Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ parcimonie





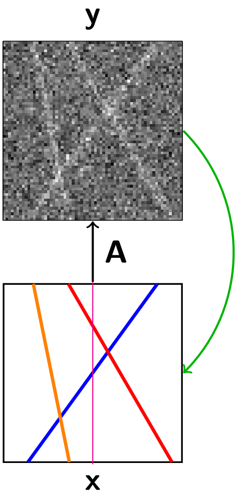
Problème inverse

Minimisation (régularisation convexe)

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \boxed{\lambda R(\mathbf{x})}$$

Exemple (Régulariseur)

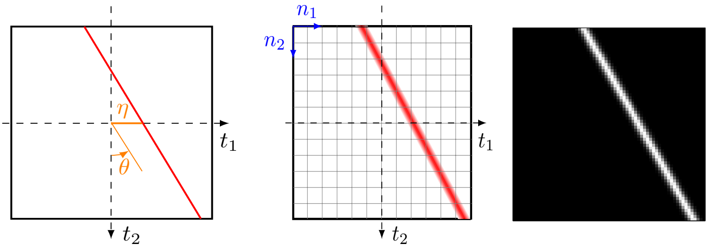
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2$
- $R(\mathbf{x}) = \|\nabla \mathbf{x}\|_1$
- $R(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{A}}$ parcimonie



Modélisation des droites

$$x^\sharp : (t_1, t_2) \in \mathbb{P} \mapsto \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \delta\big(\cos\theta_k (t_1 - \eta_k) + \sin\theta_k \, t_2\big)$$

$$\mathbf{b}^\sharp[n_1, n_2] = (x^\sharp * \phi)(n_1, n_2)$$



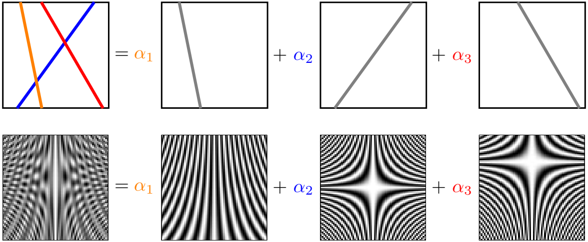
$x^\sharp$ | $x^\sharp * \phi$ | $\mathbf{b}^\sharp$

Modélisation des droites

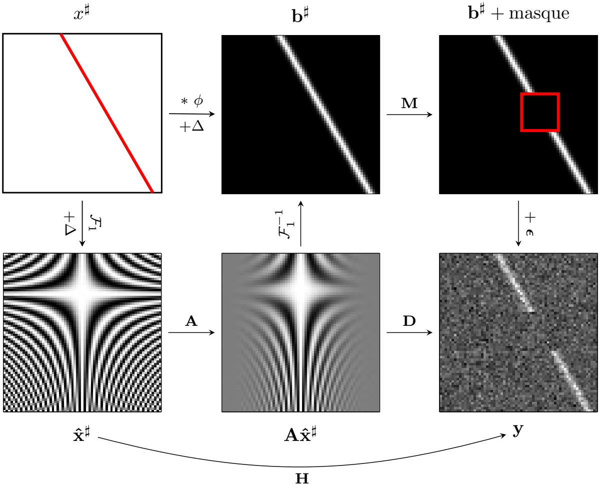
$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = (\mathcal{F}_1 x^\sharp)[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W}\right)m}$$

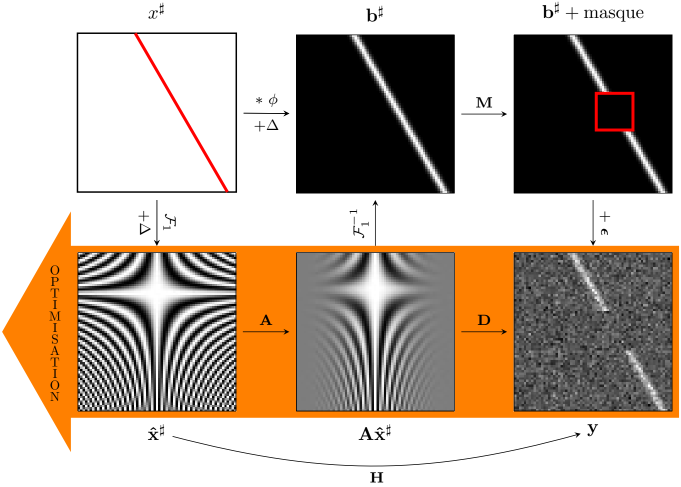
$$c_k = \frac{\alpha_k}{\cos\theta_k} \geq 0$$

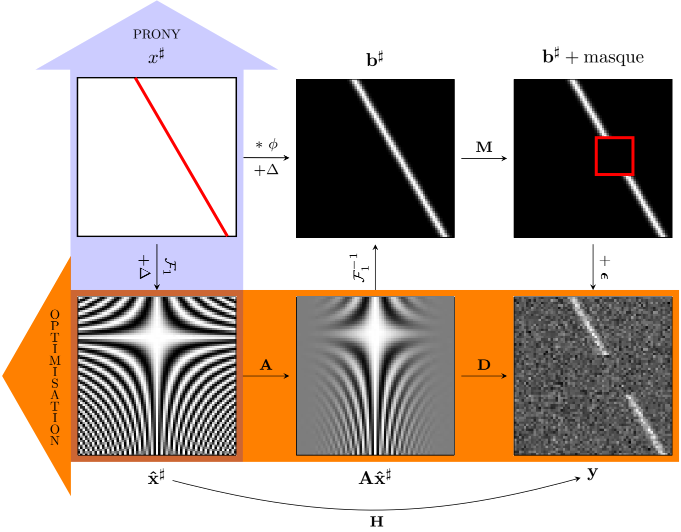
$$\hat{\mathbf{b}}^\sharp[m, :] = (\hat{g}[m]\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :]) * \boldsymbol{h} \rightarrow \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp = \hat{\mathbf{b}}^\sharp$$



Étapes de reconstruction




$x^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$ + masque
$* \phi$
$+\Delta$
$\mathbf{M}$
$\mathcal{F}_1$
$+\Delta$
$\mathcal{F}_1^{-1}$
$+\epsilon$
OPTIMISATION
$\mathbf{A}$
$\mathbf{D}$
$\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{H}$


PRONY
$x^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$ + masque
$* \, \phi$
$+\Delta$
$\mathbf{M}$
$\mathcal{F}_1$
$+\Delta$
$\mathcal{F}_1^{-1}$
$+\,\epsilon$
OPTIMISATION
$\mathbf{A}$
$\mathbf{D}$
$\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{H}$

Décomposition atomique des lignes

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W}\right)m}$$

$$\boldsymbol{l}_{n_2}^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[:, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0), \quad [\boldsymbol{a}(f, \phi)]_i = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f i + \phi)} \in \mathcal{A}$$

Décomposition atomique des colonnes

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W} m\right) n_2 + \frac{2\pi\eta_k m}{W}}$$

$$\boldsymbol{t}_m^\sharp = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, :] = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^{\mathsf{T}}, \quad [\boldsymbol{a}(f, \phi)]_i = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi f i + \phi)} \in \mathcal{A}$$

Décomposition atomique des lignes et colonnes

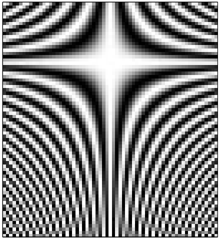
$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W}\right)m}$$

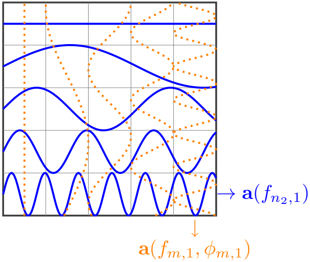
1. $\boldsymbol{l}^\sharp_{n_2} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
2. $\boldsymbol{t}^\sharp_{m} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\mathsf{T}$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)

Décomposition atomique d'une droite ($K = 1$)

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_1}{W} n_2 + \frac{\eta_1}{W}\right)m}$$

1. $\boldsymbol{l}^\sharp_{n_2} = c_1 \boldsymbol{a}(f_{n_2,1}, 0)$ (un atome sans phase)
2. $\boldsymbol{t}^\sharp_m = c_1 \boldsymbol{a}(f_{m,1}, \phi_{m,1})^\mathsf{T}$ (un atome avec phase)





Normes atomiques

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W}\, n_2 + \frac{\eta_k}{W}\right) m}, \quad c^\star = \sum_{k=1}^{K} c_k$$

1. $\boldsymbol{l}^\sharp_{n_2} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
2. $\boldsymbol{t}^\sharp_{m} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\top$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)

Norme atomique :

$$\|\boldsymbol{z}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{c'_k, f'_k, \phi'_k} \left\{ \sum_k c'_k : \boldsymbol{z} = \sum_k c'_k \boldsymbol{a}(f'_k, \phi'_k) \right\}$$

Normes atomiques

1. $\boldsymbol{l}_{n_2}^{\sharp} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0)$

$\hookrightarrow \mathbf{T}_{M+1}(\boldsymbol{l}_{n_2}^{\sharp}) \succcurlyeq 0$ + de rang K (Carathéodory, 1907)

$\hookrightarrow \|\boldsymbol{l}_{n_2}^{\sharp}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{K} c_k = \hat{\mathbf{x}}^{\sharp}[0, n_2]$

2. $\boldsymbol{t}_{m}^{\sharp} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^{\mathsf{T}}$ (Tang et coll., 2013)

$$\|\boldsymbol{t}_{m}^{\sharp}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{C}^N, t\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_N(\boldsymbol{q})) + \frac{1}{2} t : \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{t}_{m}^{\sharp} \\ \boldsymbol{t}_{m}^{\sharp\,*} & t \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\} .$$

Normes atomiques

1. $l^{\sharp}_{n_2} = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0)$

$\hookrightarrow \mathbf{T}_{M+1}(l^{\sharp}_{n_2}) \succcurlyeq 0$ + de rang K (Carathéodory, 1907)

$\hookrightarrow \|l^{\sharp}_{n_2}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{K} c_k = \hat{\mathbf{x}}^{\sharp}[0, n_2] = c^{\star}$

2. $\boldsymbol{t}^{\sharp}_m = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^{\mathsf{T}}$ (Polisano et coll., 2016)

$$\|\boldsymbol{t}^{\sharp}_m\|_{\mathcal{A}} = \min_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{C}^N} \left\{ q_0 : \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}_N(\boldsymbol{q}) & \boldsymbol{t}^{\sharp}_m \\ \boldsymbol{t}^{\sharp\,*}_m & q_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}'_N(\boldsymbol{t}^{\sharp}_m, \boldsymbol{q})} \succcurlyeq 0 \right\} \equiv \mathrm{SDP}(\boldsymbol{t}^{\sharp}_m) ,$$

$\hookrightarrow \|\boldsymbol{t}^{\sharp}_m\|_{\mathcal{A}} = \mathrm{SDP}(\boldsymbol{t}^{\sharp}_m) = \boldsymbol{q}_m[0] \leqslant c^{\star}$

Normes atomiques

$$\hat{\mathbf{x}}^\sharp[m, n_2] = \sum_{k=1}^{K} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\left(\frac{\tan\theta_k}{W} n_2 + \frac{\eta_k}{W}\right)m}, \quad c^\star = \sum_{k=1}^{K} c_k$$

1. $\boldsymbol{l}_{n_2}^\sharp = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{n_2,k}, 0)$ (lignes de $\hat{\mathbf{x}}$, sans phase)
2. $\boldsymbol{t}_m^\sharp = \sum_{k=1}^{K} c_k \boldsymbol{a}(f_{m,k}, \phi_{m,k})^\mathsf{T}$ (colonnes de $\hat{\mathbf{x}}$, avec phase)

Caractérisation (convexe) des K droites par la norme atomique

1. $\|\boldsymbol{l}_{n_2}^\sharp\|_{\mathcal{A}} = c^\star = \hat{\mathbf{x}}^\sharp[0, n_2]$ et $\mathbf{T}_{M+1}(\boldsymbol{l}_{n_2}^\sharp) \succcurlyeq 0$
2. $\|\boldsymbol{t}_m^\sharp\|_{\mathcal{A}} = \mathrm{SDP}(\boldsymbol{t}_m^\sharp) = \boldsymbol{q}_m[0] \leqslant c^\star$, $\mathbf{T}'_{H_S}(\boldsymbol{t}_m^\sharp, \boldsymbol{q}_m) \succcurlyeq 0$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \underset{\hat{\mathbf{x}},\mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}}{\arg\min} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \ ,$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \forall n_2 = 0, \ldots, H_S - 1, \ \forall m = 0, \ldots, M \ , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leqslant c \ , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leqslant c \ , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 \ , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 \ . \end{cases}$$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \underset{\hat{\mathbf{x}},\mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}}{\arg\min} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 ,$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \forall n_2 = 0, \ldots, H_S - 1, \ \forall m = 0, \ldots, M , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{cases}$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathcal{H}}{\arg\min} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathrm{L}_i(\mathbf{X})) \right\}$$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \underset{\hat{\mathbf{x}},\mathbf{q} \in \mathcal{X}\times\mathcal{Q}}{\arg\min} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 ,$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \forall n_2 = 0, \ldots, H_S - 1, \ \forall m = 0, \ldots, M , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{cases}$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathcal{H}}{\arg\min} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathrm{L}_i(\mathbf{X})) \right\}$$

Problème d'optimisation convexe

Proposition (Minimisation convexe)

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \underset{\hat{\mathbf{x}},\mathbf{q} \in \mathcal{X}\times\mathcal{Q}}{\arg\min} \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 ,$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \forall n_2 = 0, \ldots, H_S - 1, \ \forall m = 0, \ldots, M , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0,0] \leqslant c , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m,:], \mathbf{q}[m,:]) \succcurlyeq 0 , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{cases}$$

(Chambolle et Pock, 2010)

$$\tilde{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathcal{H}}{\arg\min} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathrm{L}_i(\mathbf{X})) \right\}$$

Problème d'optimisation convexe

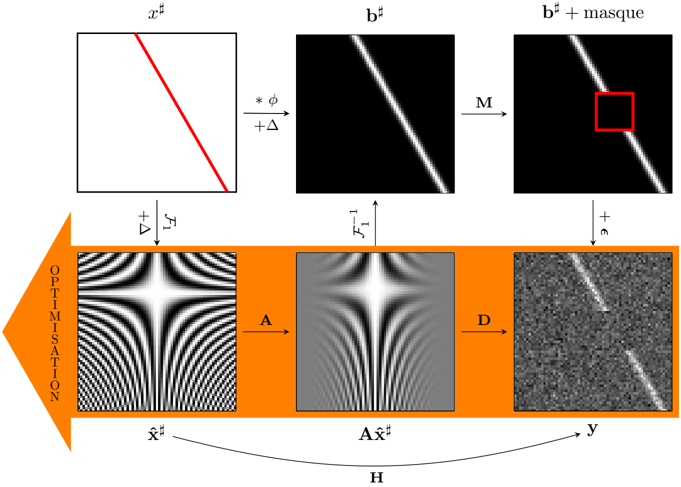
Proposition (Minimisation convexe)

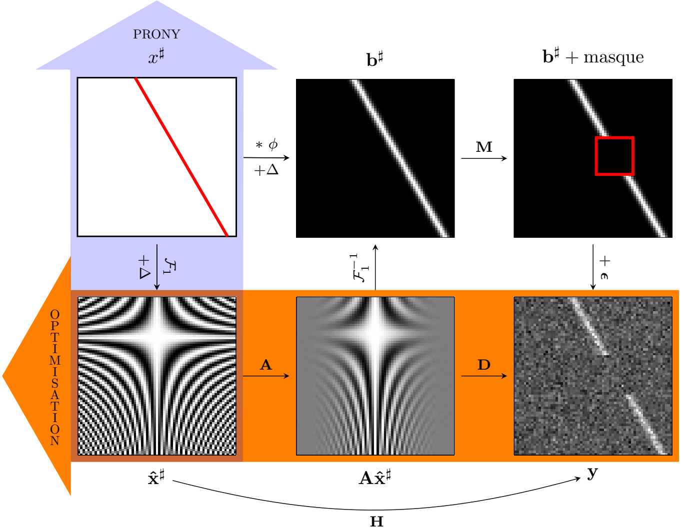
$$\tilde{\mathbf{x}} \in \underset{\hat{\mathbf{x}},\mathbf{q} \in \mathcal{X} \times \mathcal{Q}}{\arg\min} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 ,$$

$$\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \forall n_2 = 0, \dots, H_S - 1, \ \forall m = 0, \dots, M , \\ \hat{\mathbf{x}}[0, n_2] = \hat{\mathbf{x}}[0, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{q}[m, 0] \leqslant c , \\ \mathbf{T}'_{H_S}(\hat{\mathbf{x}}[m, :], \mathbf{q}[m, :]) \succcurlyeq 0 , \\ \mathbf{T}_{M+1}(\hat{\mathbf{x}}[:, n_2]) \succcurlyeq 0 . \end{cases}$$

(Chambolle et Pock, 2010)

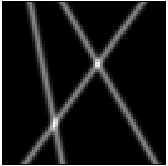
$$\tilde{\mathbf{X}} = \underset{\mathbf{X} \in \mathcal{H}}{\arg\min} \left\{ F(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) + \sum_{i=0}^{Q-1} H_i(\mathrm{L}_i(\mathbf{X})) \right\}$$


$x^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$ + masque
$* \phi$
$+\Delta$
$\mathbf{M}$
$+\Delta$
$\mathcal{F}_1$
$\mathcal{F}_1^{-1}$
$+\epsilon$
OPTIMISATION
$\mathbf{A}$
$\mathbf{D}$
$\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{H}$

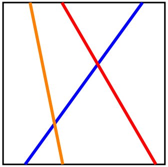

PRONY
$x^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$
$\mathbf{b}^\sharp$ + masque
$*\ \phi$
$+\Delta$
$\mathbf{M}$
$+\Delta$
$\mathcal{F}_1$
$\mathcal{F}_1^{-1}$
$+\ \epsilon$
OPTIMISATION
$\mathbf{A}$
$\mathbf{D}$
$\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^\sharp$
$\mathbf{y}$
$\mathbf{H}$

Expériences numériques

- Débruitage et déconvolution



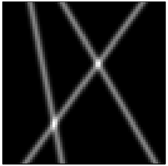
Exp. 1



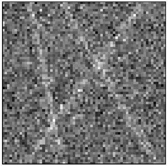
Détection

Expériences numériques

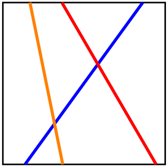
- Débruitage et déconvolution



Exp. 1



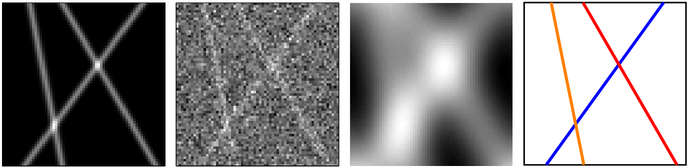
Exp. 2



Détection

Expériences numériques

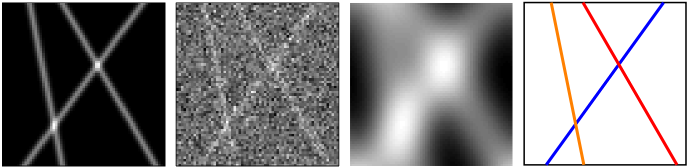
- Débruitage et déconvolution



Exp. 1 Exp. 2 Exp 3. Détection

Expériences numériques

- Débruitage et déconvolution



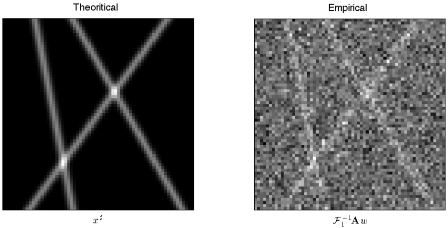
Exp. 1 | Exp. 2 | Exp 3. | Détection

TABLE: Erreurs relatives de l'estimation des paramètres des lignes

	Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**
Δ_θ/θ	$(10^{-7}, 3.10^{-6}, 7.10^{-7})$	$(10^{-2}, 6.10^{-2}, 9.10^{-2})$	$(6.10^{-7}, 9.10^{-5}, 8.10^{-6})$
Δ_α/α	$(10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-7})$	$(10^{-2}, 9.10^{-2}, 2.10^{-1})$	$(4.10^{-5}, 2.10^{-5}, 2.10^{-5})$
Δ_η	$(4.10^{-6}, 7.10^{-6}, 7.10^{-6})$	$(5.10^{-2}, 4.10^{-2}, 3.10^{-2})$	$(5.10^{-5}, 10^{-4}, 3.10^{-4})$

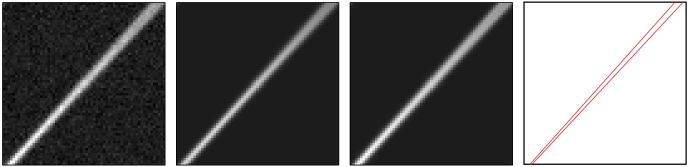
Expériences numériques

image000



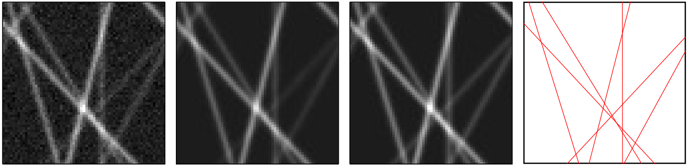
Expériences numériques

- Lignes proches



Bruitée | Débruitée | Sans bruit | Détection

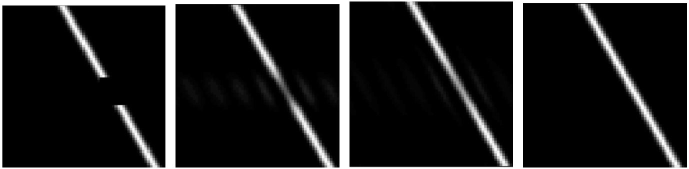
- Lignes multiples



Bruitée | Débruitée | Sans bruit | Détection

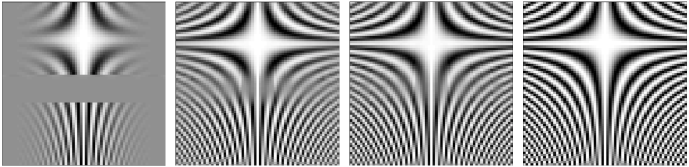
Expériences numériques

- Inpainting spatial



Masquage — iter $= 2000$ — iter $= 10000$ — iter $\to \infty$

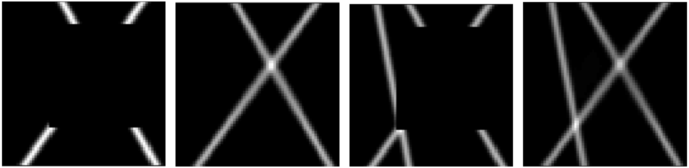
- Inpainting en Fourier



Masquage — iter $= 2000$ — iter $= 10000$ — iter $\to \infty$

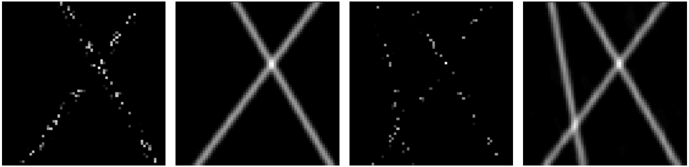
Expériences numériques

- Inpainting masquage important



Masquage | Inpainting | Masquage | Inpainting

- Inpainting masquage aléatoire



Masquage | Inpainting | Masquage | Inpainting

Plan de l'exposé

Conclusion

- Deux nouveaux modèles de champs autosimilaires anisotropes à orientation et régularité locales prescrites
- Méthodes de synthèse efficaces
- Introduction d'une notion d'orientation locale pour les champs aléatoires
- Caractérisation de la loi des estimateurs statistiques de l'orientation
- Nouvelle méthode de super-résolution de lignes 2-D

Perpectives

- Amélioration et prolongation des méthodes :
  - Définition de la transformée de Riesz d'un champ
  - Test d'hypothèse de directionnalité d'une texture
  - Extraction des paramètres des lignes en 2-D
- Applications :
  - Tests d'orientation sur des images médicales
  - Super-résolution de *patchs* sur images de microscopie
- Perspectives à plus long terme :
  - Traiter le cas des orientations multiples
  - Super-résolution de courbes 2-D